Cálculo III
Condiciones de Karush–Khun–Tucker: un ejemplo

Las condiciones Karush–Khun–Tucker (KKT) determinan el mínimo de una función real y multivaluada $u(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, sujeta a las condiciones subsidiaras: (i) $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, donde $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^p$, y (ii) $\varphi_j \leq 0$ para $j = 1, \ldots, m$. De este modo, estas condiciones garantizan que la solución al problema de optimización[1]

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})\} , \quad \text{donde} \quad \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) = u(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) , \quad (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m .$$

Ejemplo 1. *El siguiente ejemplo es una consecuencia inmediata de las condiciones KKT. Supongamos que x_j con $j = 1, \ldots, 24$ corresponden a la cantidad de un determinado producto por cada hora del día. Asimismo, sean p_j los precios correspondientes de las cantidades x_j. Supongamos que $x_j > 0$; es decir, al menos x_j cantidad del producto fue vendido en un lapso de 24 horas.*

Por otro lado, sea y la capacidad de salida del producto y $g(y)$ el costo diario al capital, donde $c(x_1, \ldots, x_{24})$ es la función de costo diario.

Supongamos que $\dfrac{\partial c}{\partial x_j} > 0$ y $g'(y) > 0$, lo cual significa que el costo diario de la producción del producto aumenta con la cantidad del producto; además, el costo diario al capital es creciente respecto a la capacidad de salida. Ahora, si los precios no se ven afectados por la producción del producto, entonces $\dfrac{\partial p_j}{\partial x_j} = 0$ para todo $j = 1, \ldots, 24$, lo cual indica que los precios están fijos.

De este modo, la función de ganacia por días se encuentra determinada por

$$u(x_1, \ldots, x_{24}, y) = \sum_{j=1}^{24} p_j x_j - c(x_1, \ldots, x_{24}) - g(y) ,$$

donde se tienen las restricciones $0 \leq x_j \leq y$ para todo $j = 1, \ldots, 24$. En consecuencia, la función Lagrangiana queda definida por

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, y, \boldsymbol{\lambda}) = \underbrace{\sum_{j=1}^{24} p_j x_j - c(x_1, \ldots, x_{24}) - g(y)}_{u(\mathbf{x}, y)} + \underbrace{\sum_{j=1}^{24} \lambda_j (y - x_j)}_{\boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, y)} , \quad \text{donde } \mathbf{x}^T = (x_1, \ldots, x_{24}) .$$

Al buscar los extremos de $\mathcal{L}$, tenemos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = p_j - \frac{\partial c}{\partial x_j} - \lambda_j = 0 , \quad \text{con } j = 1, \ldots, 24 ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -g'(y) + \sum_{j=1}^{24} \lambda_j = 0 .$$

Por otro lado, debido a que $x_j - y \leq 0$ para todo $j = 1, \ldots, 24$ y $x_j > 0$ para alguna j, a partir de las condiciones KKT, se satisface que $\lambda_{j\star} \varphi(\mathbf{x}, y) = 0$, si existe un $\lambda_{j\star} = 0$. Como consecuencia, este último resultado indica que en la $j\star$-ésima hora, el precio de la cantidad $x_{j\star}$ puede fijarse como

$$p_{j\star} = \frac{\partial c}{\partial x_{j\star}} ,$$

[1] Véase, por ejemplo, 'S. Boyd & L. Vandenberghe (2004). *Convex Optimization*. Cambridge: Cambridge University Press, p 244.'

la cual indica la condición de optimización. En otras palabras, el precio del producto debe ser a lo menos el costo de operación cuando haya un exceso de la capacidad de producción. Más aún, cuando $x_i = y$ *para algunos valores de* $i = 1, \ldots, 24$*, se tiene que*

$$\sum_i \lambda_i = g'(y) > 0\,, \tag{1}$$

donde la suma es sobre todas las horas donde se alcanza la capacidad de producción, $\lambda_i > 0$*. Como consecuencia, esto significa que*

$$p_i = \frac{\partial c}{\partial x_i} + \lambda_i\,, \quad \textit{para al menos una hora } i = 1, \ldots, 24\,.$$

Es decir, el precio de la cantidad x_i *del producto excede el costo de producción por una cantidad* λ_i*. De este modo, a partir de* (1), $g'(y) = \sum_i \lambda_i$ *indica que la suma de todos los incrementos donde se alcanza la capacidad de producción, debe ser igual al incremento en el costo de la capacidad de producción.*