Método de Duhamel y de coeficientes indeterminados

Resumen

En las siguientes notas se exponen ejemplos para encontrar soluciones particulares por medio del *método de Duhamel* y el de *coeficientes indeterminados*.

El corazón de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) lineales de segundo orden yace en el conjunto de las soluciones de la EDO homogénea, el cual denotaremos por $\mathcal{N}$; es decir, primero tenemos que entender qué tipo de conjunto es $\mathcal{N}$. Con este fin, tomaremos en cuenta un operador diferencial $\mathcal{L} : \mathcal{C}^2(I) \to \mathcal{C}^0(I)$, donde $I \subset \mathbb{R}$ definido como sigue

$$\mathcal{L}[x] = \ddot{x} + \alpha(t)\dot{x} + \beta(t)x\,, \quad \text{donde} \quad \alpha, \beta \in \mathcal{C}^0(I)\,.$$

De este modo, el operador $\mathcal{L}$ captura todas las EDO lineal de segundo orden y, debido a sus propiedades lineales, el conjunto $\mathcal{N} = \left\{ x \in \mathcal{C}^2(I) \,|\, \mathcal{L}[x] = 0 \right\}$, denominado el *espacio de soluciones de la EDO homogénea* es un espacio vectorial, como puede verificarse fácilmente. Observemos que los elementos de este espacio son elementos del núcleo de $\mathcal{L}$. De esta manera, encontrar una solución a la EDO

$$\mathcal{L}[x] = f(t)\,, \tag{1}$$

consiste en descomponer en una combinación lineal de $\{x_1, x_2\} \hookrightarrow \mathcal{N}$ y un elemento $\varphi \in \mathcal{C}^2(I)$ tal que el conjunto de soluciones está caracterizado por

$$x(t) = \underbrace{k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)}_{x_h(t)} + x_p(t)\,, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}\,, \tag{2}$$

donde $x_h(t)$ es conocida como *solución homogénea* y $x_p(t)$ como *solución particular*. De este modo, al sustituir (2) en (1), se obtiene que

$$f(t) = \mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[k_1x_1 + k_2x_2 + x_p] \underbrace{=}_{\mathcal{L}\text{-lineal}} k_1\mathcal{L}[x_1] + k_2\mathcal{L}[x_2] + \mathcal{L}[x_p] \underbrace{=}_{x_{1,2} \in \mathcal{N}} \mathcal{L}[x_p]\,.$$

A partir de este resultado, afirmamos que la solución particular $x_p(t)$ es una función que no puede ser un elemento de $\mathcal{N}$, sino del rango de $\mathcal{L}$. En otras palabras, $x_p(t)$ puede calcularse de tal manera que sea linealmente independiente a $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

Método de Duhamel

La idea central de este método, también conocido como *método de variación de parámetros*, consiste en buscar una solución particular de la forma:

$$x_p(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t)\,.$$

A partir de aquí, como puede verificarse fácilmente, $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^1(I)$ y satisfacen que: (i) $x_1\dot{u}_1 + x_2\dot{u}_2 = 0$ y (ii) $\dot{x}_1\dot{u}_1 + \dot{x}_2\dot{u}_2 = f(t)$. De esta manera, como consecuencia del *Teorema fundamental de cálculo*, se obtiene que

$$u_1(t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{x_2(\xi)f(\xi)}{W[x_1,x_2](\xi)}\,\mathrm{d}\xi \quad \text{y} \quad u_2(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{x_1(\xi)f(\xi)}{W[x_1,x_2](\xi)}\,\mathrm{d}\xi\,, \quad \text{donde} \quad W[x_1,x_2] = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{vmatrix}\,;$$

por lo tanto,

$$x_p(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{x_2(t)x_1(\xi) - x_1(t)x_2(\xi)}{W[x_1, x_2](\xi)} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi \,.$$

Este método garantiza la existencia de la solución particular y siempre funciona; sin embargo, puede conducir a cálculos muy largos y no siempre exhibe una expresión explícita para $x_p(t)$.

Ejemplo 1. Dada la EDO, $\ddot{x} + x = \tan t$, queremos encontrar la solución cuando $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 1$.

De este modo, primero buscamos una base al espacio $\mathcal{N}$. Para ello, las raíces del polinomio característico $P_2(\lambda) = \lambda^2 + 1$ son $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = i$, lo cual implica que

$$x_h(t) = k_1 \underbrace{\cos t}_{x_1(t)} + k_2 \underbrace{\operatorname{sen} t}_{x_2(t)} \,, \quad \text{donde} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R} \,.$$

Ahora, para encontrar la solución particular, observemos que $W[x_1, x_2] = 1$, entonces

$$x_p(t) = \int_0^t \left(\underbrace{\operatorname{sen} t \cos \xi}_{x_2(t)x_1(\xi)} - \underbrace{\cos t \operatorname{sen} \xi}_{x_1(t)x_2(\xi)} \right) \tan \xi \, \mathrm{d}\xi \underbrace{=}_{(\star)} \int_0^t \left(\operatorname{sen} t \sin \xi - \cos t \sec \xi + \cos t \cos \xi \right)\, \mathrm{d}\xi \,,$$

debido a las identidades: (i) $\cos \xi \tan \xi = \operatorname{sen} \xi$ y (ii) $\operatorname{sen}^2 \xi = 1 - \cos^2 \xi$, utilizadas en $(\star)$. Ahora, tenemos que lidiar con la integral

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left(\operatorname{sen} t \sin \xi - \cos t \sec \xi + \cos t \cos \xi \right)\, \mathrm{d}\xi = \operatorname{sen} t \int_0^t \sin \xi \, \mathrm{d}\xi + \cos t \int_0^t \cos \xi \, \mathrm{d}\xi - \cos t \int_0^t \sec \xi \, \mathrm{d}\xi = \\
= -\operatorname{sen} t \cos t + \cos t \operatorname{sen} t - \cos t \int_0^t \frac{\sec^2 \xi + \sec \xi \tan \xi}{\tan \xi + \sec \xi} \, \mathrm{d}\xi = \\
= -\cos t \log\left(\sec t + \tan t\right) \,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general está dada por $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, donde al imponer las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $\dot{x}(0) = 1$, tenemos que

$$x(t) = \cos t + 2 \operatorname{sen} t - \cos t \log\left(\sec t + \tan t\right) \,.$$

Método de coeficientes indeterminados

Este método consiste en seguir la misma idea de obtener una solución particular que no pertenezca a $\mathcal{N}$. Sin embargo, este método funciona cuando podemos proponer posibles candidatos a solución particular; usualmente, esto ocurre cuando los coeficientes del operador diferencial $\mathcal{L}[x]$ son constantes, es decir, $\alpha(t) \equiv \alpha$ y $\beta(t) \equiv \beta$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. De este modo, el método puede dividirse en dos pasos: (i) primero, proponemos una familia de candidatos a solución $x_p(t)$ de tal manera que satisfaga la relación $\mathcal{L}[x_p] = f(t)$; (ii) segundo, buscamos el miembro de esta familia que efectivamente cumpla con esta condición.

A continuación, se expone de manera general los casos donde típicamente este método funciona efectivamente para encontrar soluciones particulares. Consideremos al operador diferencial

$$\mathcal{L}[x] = \ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = f(t) \,, \quad \text{con} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,. \tag{3}$$

Ejemplo 2. Supongamos que $f(t)$ es un polinomio de grado $N > 0$; es decir, $f(t) = P_N(t)$, el cual sin pérdida de generalidad tenemos que

$$P_N(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n t^n \,. \tag{4}$$

En este sentido, la familia de candidatos a solución particular es

$$x_p(t) = Q_N(t)\,, \quad \text{donde} \quad Q_N(t) := \sum_{n=0}^{N} A_n t^n\,, \tag{5}$$

donde $\{A_n\}_{n=0,\ldots,N}$ son coeficientes por determinar. Esto quiere decir que $\mathcal{L}[x_p]$ es un polinomio de grado $N > 0$, si $\beta \neq 0$. De esta manera, se tiene que

$$\dot{x}_p(t) = \sum_{n=1}^{N} nA_n t^{n-1} \quad \text{y} \quad \ddot{x}_p(t) = \sum_{n=2}^{N} n(n-1)A_n t^{n-2}\,;$$

al sustituir las derivadas anteriores en $\mathcal{L}[x_p] = f(t)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sum_{n=0}^{N} a_n t^n}_{f(t)} &= \sum_{n=2}^{N} n(n-1)A_n t^{n-2} + \alpha \sum_{n=1}^{N} nA_n t^{n-1} + \beta \sum_{n=0}^{N} A_n t^n = \\
&= \sum_{n=0}^{N} (n+2)(n+1)A_{n+2} t^n + \alpha \sum_{n=0}^{N} (n+1)A_{n+1} t^n + \beta \sum_{n=0}^{N} A_n t^n = \\
&= \sum_{n=0}^{N} \left[(n+2)(n+1)A_{n+2} + (n+1)\alpha A_{n+1} + \beta A_n\right] t^n\,.
\end{aligned}$$

Para $\beta \neq 0$, esta igualdad conduce la ecuación en diferencias

$$\begin{aligned}
A_N &= \frac{a_N}{\beta}\,, \quad A_{N-1} = \frac{a_{N-1} - N\alpha A_N}{\beta}\,, \\
A_n &= \frac{a_n - [(n+2)(n+1)A_{n+2} + (n+1)\alpha A_{n+1}]}{\beta}\,, \quad n = 0, \ldots, N-2\,.
\end{aligned}$$

Si $\beta = 0$, entonces tenemos dos casos:

(a) Si, por el contrario, $\alpha \neq 0$, entonces (5) toma la forma de un polinomio de grado $N+1$, puesto que buscamos una solución particular para $\ddot{x}_p(t) + \alpha \dot{x}_p(t) = P_N(t)$. De este modo, tenemos que

$$\begin{aligned}
A_{N+1} &= \frac{a_N}{(N+1)\alpha}\,, \quad A_N = \frac{a_{N-1} - N(N+1)A_{N+1}}{N\alpha}\,, \\
A_{n+1} &= \frac{a_n - (n+1)(n+2)A_{n+2}}{(n+1)\alpha}\,, \quad n = 0, \ldots, N-2\,,
\end{aligned}$$

donde A_0 es una constante arbitraria, como consecuencia del Teorema fundamental del cálculo.

(b) Si $\alpha = 0$, entonces la solución particular se obtiene al integrar dos veces al polinomio $P_N(t)$.

Ejemplo 3. Consideremos ahora que la función $f(t)$ es de la forma $P_N(t)e^{rt}$, donde $r \in \mathbb{R}$. Para simplificar el problema y notar que al derivar $f(t)$, obtendremos un polinomio de grado N multiplicado por la función exponencial, proponemos el cambio de variable $x(t) = u(t)e^{rt}$. De este modo, al sustituir en (1), tenemos que u debe satisfacer

$$\ddot{u} + (\alpha + 2r)\,\dot{u} + \underbrace{\left(r^2 + \alpha r + \beta\right)}_{(\star)} u = P_N(t)\,. \tag{6}$$

Notemos que, si el factor $(\star)$ en la ecuación (6) se anula, entonces el parámetro $r \in \mathbb{R}$ es raíz del polinomio característico; lo cual indica que $e^{rt} \in \mathcal{N}$, espacio de soluciones de la EDO homogénea $\mathcal{L}[x] = 0$. De este modo, el tipo de solución particular que se busca resulta a partir de los dos casos siguientes:

(a) Si $(\star) \neq 0$, entonces la variable se encuentra a partir de buscar soluciones como en (5). En otras palabras, se supone que $u(t) = Q_N(t)$ y, al sustituir en (6), la solución $u_p(t)$ se obtiene a partir de los pasos usados en el ejemplo anterior.

(b) Si r es una raíz del polinomio característico, i.e. $(\star) = 0$,
   - *a*) si $\alpha + 2r_* \neq 0$ y $r_* = -\dfrac{\beta}{2}$ no es una raíz doble, proponemos $u(t) = Q_{N+1}(t)$, o bien,
   - *b*) si $\alpha + 2r_* = 0$ y $r_* = -\dfrac{\beta}{2}$ es una raíz doble, proponemos $u(t) = Q_{N+2}(t)$,

   y encontramos $u_p(t)$ a partir de (6).

Como puede verificarse fácilmente, si $r = 2$, $N = 2$, $\alpha = -4$ y $\beta = 4$, la solución general está dada por

$$x(t) = k_1 e^{2t} + k_2 t e^{2t} + \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{12}t^4\right) e^{2t}\,.$$

Ejemplo 4. Cuando la no homogeneidad en (3) es de la forma $P_N(t)\cos\omega t$ o $P_N(t)\,\mathrm{sen}\,\omega t$, entonces se buscan soluciones particulares de la forma $x_p(t) = Q_N(t)\cos\omega t + R_N(t)\,\mathrm{sen}\,\omega t$. De este modo, proponer los factores $Q_N(t)$ y $R_N(t)$ no es siempre una tarea sencilla. Sin embargo, este problema puede resolverse al considerar siguiente argumento. Sea $z(t) = x(t) + iy(t)$, donde $x, y : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$\mathcal{L}[z] = \ddot{z} + \alpha\dot{z} + \beta z = P_N(t)e^{i\omega t}\,; \tag{7}$$

lo cual implica que. al tomar en cuenta la ecuación de Euler $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\,\mathrm{sen}\,\omega t$, la parte real e imaginaria de (7) satisfacen las EDOs

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = P_N(t)\cos\omega t \quad \text{y} \quad \ddot{y} + \alpha\dot{y} + \beta y = P_N(t)\,\mathrm{sen}\,\omega t\,,$$

respectivamente. De este modo, el ejemplo anterior sugiere la estrategia a seguir, donde $r = i\omega$; en otras palabras, se hace el cambio de variable $x(t) = u(t)e^{i\omega t}$ para obtener la EDO que $u(t)$ satisface

$$\ddot{u} + (\alpha + i2\omega)\,\dot{u} + \underbrace{\left(\beta - \omega^2 + i\alpha\omega\right)}_{(\star\star)} u = P_N(t)\,.$$

En este caso, la solución para u toma la forma $u_p(t) = Q_N(t)$, donde los coeficientes $\{A_n\}_{n=0,\dots,N} \in \mathbb{C}$ y se procede como en el ejemplo anterior. Nótese que ω no puede ser raíz repetida del polinomio característico. Por lo tanto, si $(\star\star) \neq 0$, entonces se propone $u(t) = Q_N(t)$ y si $(\star\star) = 0$ y $\alpha = 0$, entonces $\omega^2 = \beta$ y se propone $u(t) = Q_{N+1}(t)$.

De este modo, la EDO dada por $\ddot{x} + 4x = \cos 2t$ tiene solución general

$$x(t) = \underbrace{k_1\cos 2t + k_2\,\mathrm{sen}\,2t}_{x_h(t)} + \underbrace{\frac{t}{4}\,\mathrm{sen}\,2t}_{x_p(t)}\,.$$