Notas EDO Exactas

Resumen

En estas notas abordaremos un teorema fundamental en la teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). Este teorema determina las condiciones que permiten encontrar la solución general de EDOs desde el punto de vista de la *teoría de las EDOs Exactas*.

Las EDOs de primer orden pueden escribirse en la forma de un sistema dinámico como

$$\dot{x} = f(t, x; \mu) . \tag{1}$$

Esto indica que la razón de cambio instantáneo $\dot{x}$ de la variable de estado x, está determinada por la relación de correspondencia f, la cual es una función de: (i) la variable de estado y (ii) la variable independiente. El vector de parámetros μ caracteriza las propiedades que no cambian con respecto a la variable independiente. En el caso que el sistema dinámico (1) sea un modelo particular, se dice que el conjunto de parámetros caracteriza al sistema en cuestión.

En estas notas se considera el caso cuando la ecuación en (1) se escribe en la forma

$$M(t, x) + N(t, x)\dot{x} = 0 . \tag{2}$$

Para el propósito de estas notas, no es indispensable escribir explícitamente la dependencia de las funciones M y N del vector de parámetros μ. La primer observación que se toma en cuenta relaciona las ecuaciones (1) y (2). Nótese que ambas ecuaciones son equivalentes, si $M(t, x) = -f(t, x)$ y $N(t, x) = 1$.

Notemos que la ecuación (2) tiene la forma que resulta de desarrollar la EDO

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, x) = 0 , \tag{3}$$

esto es debido a que

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, x(t)) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, x(t))\dot{x} .$$

Las ecuaciones del tipo (3) son las EDO de primer orden más generales que es posible resolver. El problema consiste en encontrar la función $\tilde{\varphi}(t, x) = \varphi(t, x) - k$, donde $k \in \mathbb{R}$ es una constante determinada por las condiciones iniciales. En otras palabras, la ecuación (2) pueden ser escritas en la forma (3) si y sólo si existe una función $\varphi(t, x)$ tal que $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$. De este modo, las ecuaciones de la forma (2) reciben una clasificación específica si satisfacen la definición

Definición 1. La EDO (2) se dice que es *exacta*, si $\dfrac{\partial M}{\partial x} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$.

El resultado que garantiza la existencia de esta función, es decir, la solución de las EDOs exactas, se enuncia a continuación:

Teorema 1. Sean $M(t, x)$ y $N(t, x)$ funciones cuyas primeras derivadas parciales son continuas en $\mathcal{R}$, el cual se define como

$$\mathcal{R} = \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \,|\alpha_1 < t < \alpha_2 \,, \, \beta_1 < x < \beta_2 \right\} .$$

Existe una función $\varphi(t, x)$ tal que:

$$M(t, x) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \text{ y } N(t, x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \underline{\text{si y sólo si}} \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t} \quad \forall \, (t, x) \in \mathcal{R} .$$

Demostración. Primero, se observa que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = N(t,x)$ para alguna función $\varphi(t,x)$, si y sólo si

$$\varphi(t,x) = \int_{k_1}^{x} N(t,\xi)\mathrm{d}\xi + k(t)\,, \tag{4}$$

donde $k(t)$ es una función arbitraria de la variable t y k_1 es una constante.

Ahora, al calcular la derivada parcial de (4) respecto a t y tomando en cuenta que $M(t,x) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$, se obtiene que

$$M(t,x) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int_{k_1}^{x} \frac{\partial N}{\partial t}(t,\xi)\mathrm{d}\xi + k'(t)\,.$$

La derivada parcial respecto a t conmuta con el símbolo de integral debido a que el límite superior de (4) no depende de t. En consecuencia, a partir de esta última ecuación, se obtiene

$$k'(t) = M(t,x) - \int_{k_1}^{x} \frac{\partial N}{\partial t}(t,\xi)\mathrm{d}\xi\,. \tag{5}$$

Debido a que $k'(t)$ es una función de solamente t, la derivada parcial con respecto a x es cero; es decir, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[k'(t)\right] = 0$. De este modo, la relación en (5) se satisface, si y sólo si

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left(M(t,x) - \int_{k_1}^{x} \frac{\partial N}{\partial t}(t,\xi)\mathrm{d}\xi\right) = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{k_1}^{x} \frac{\partial N}{\partial t}(t,\xi)\mathrm{d}\xi\right) = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial t}\,, \tag{6}$$

donde se usa el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) para la igualdad de la derecha.

En otras palabras, el resultado que conduce a la ecuación (6) indica que:

(i) por un lado, si $\dfrac{\partial M}{\partial x} \neq \dfrac{\partial N}{\partial t}$, entonces hay una contradicción, lo significa que no existe $\varphi(t,x)$ tal que

$$M(t,x) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{y} \quad N(t,x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,;$$

(ii) por el otro lado, si $\dfrac{\partial M}{\partial x} = \dfrac{\partial N}{\partial t}$, entonces, debido al TFC, la ecuación (5) señala que

$$k(t) = \int_{k_2}^{t}\left(M(\eta,x) - \int_{k_1}^{x} \frac{\partial N}{\partial \eta}(\eta,\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\eta\,, \tag{7}$$

donde k_2 es una constante.

Por lo tanto, la demostración se concluye al sustituir (7) en (4); es decir,

$$\varphi(t,x) = \int_{k_1}^{x} N(t,\xi)\mathrm{d}\xi + \int_{k_2}^{t} M(\eta,x)\mathrm{d}\eta - \int_{k_2}^{t}\left(\int_{k_1}^{x} \frac{\partial N}{\partial \eta}(\eta,\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\eta\,.$$

■

Ejemplo. Dada la *elasticidad de costo* de un producto, se quiere encontrar el costo de producción (*variable dependiente*) como función de las unidades (*variable independiente*) que se producen.

Sea $p(u)$ el costo de producción de las unidades u. La elasticidad de costo $E(u)$ se define como el cociente entre la *razón de cambio instantáneo del costo por unidad* $p'(u)$ y *el costo promedio por unidad* $\dfrac{p(u)}{u}$. En otras palabras, se tiene que

$$E(u) = \frac{p'(u)}{\dfrac{p(u)}{u}} = \frac{up'(u)}{p(u)}\,.$$

Si se supone que la elasticidad tiene la forma

$$E(u) = \frac{2\alpha u - \beta p(u)}{2\beta p(u) - \alpha u}\,, \tag{E0}$$

donde α y β son constantes y, además, que el costo para u_0 unidades es p_0, el problema a resolver se formula como sigue:

$$(\text{P}) \begin{cases} \beta p^2 - 2\alpha u p + \left(2\beta u p - \alpha u^2\right) p' = 0\,, \quad u > u_0\,, \\ p(u_0) = p_0\,, \end{cases}$$

donde $p_0 > 0$.

La solución al problema (P) puede encontrarse por medio de la *Teoría de las EDO exactas*.

1. Primero. Se definen las funciones $M(u, p)$ y $N(u, p)$ como sigue:

$$M(u, p) = \beta p^2 - 2\alpha u p\,, \quad N(u, p) = 2\beta u p - \alpha u^2\,.$$

2. Segundo. Se verifica que la ecuación en (P) es, efectivamente, una EDO exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial p} = -2\alpha u + 2\beta p = \frac{\partial N}{\partial u}\,.$$

3. Tercero. A partir del Teorema 1, se tiene que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = M(u, p) = \beta p^2 - 2\alpha u p\,.$$

De este modo, debido al TFC, se obtiene

$$\varphi(u, p) = \beta u p^2 - \alpha u^2 p + k(p)\,, \tag{E1}$$

donde $k(p)$ es una función de p por determinarse.

4. Cuarto. Debido al Teorema 1 y la función (E1), se obtiene

$$2\beta u p - \alpha u^2 = N(u, p) = \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 2\beta u p - \alpha u^2 + k'(p)\,,$$

lo cual significa que $k'(p) = 0$ y por el TFC, $k(p) \equiv k_0$, donde k_0 es una constante. Por lo tanto,

$$\varphi(u, p) = \beta u p^2 - \alpha u^2 p + k_0\,. \tag{E2}$$

5. Quinto. Se encuentra la constante k_0 a partir de las condición inicial en el problema (P). De esta manera, tenemos que

$$k_0 = \alpha u_0^2 p_0 - \beta u_0 p_0^2\,. \tag{E3}$$

Esto último debido a que se busca una constante tal que satisface la ecuación $\varphi(u_0, p_0) = 0$.

6. Sexto. Con el fin de determinar si es posible encontrar únicamente el costo de producción por unidad, se observa que

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right|_{(u_0,p_0)} = 2\left(\beta p_0 - \alpha u_0\right) u_0 \tag{E4}$$

es distinto de cero, siempre y cuando $\beta p_0 \neq \alpha u_0$. En otras palabras, el costo de producción p_0 de las unidades u_0 no puede ser proporcional a u_0 en una razón α/β.

7. Séptimo. A partir de (E2) y (E3) se tiene que

$$p_{\pm}(u) = \frac{1}{2\beta}\left(\alpha u \pm \sqrt{\alpha^2 u^2 - \frac{4\beta\left(\alpha u_0^2 p_0 - \beta u_0 p_0^2\right)}{u}}\right).$$

Ahora, con el fin de determinar la solución que se busca, nótese que

$$p_+(u)p_-(u) = \frac{\alpha u_0^2 p_0 - \beta u_0 p_0^2}{\beta u},$$

el cual es siempre positivo bajo la condición que

$$p_0 < \frac{\alpha}{\beta} u_0 .$$

Debido a que $p(u) > 0$ para todo $u > 0$, este resultado indicaría que ambas funciones $p_+(u)$ y $p_-(u)$ son positivas; sin embargo, el resultado en (E4) señala que la solucón es única. Por lo tanto, esto es posible solamente si

$$p_0 > \frac{\alpha}{\beta} u_0 ,$$

lo cual indica que la solución es

$$p_+(u) = \frac{1}{2\beta}\left(\alpha u + \sqrt{\alpha^2 u^2 + \frac{4\beta\left(\beta u_0 p_0^2 - \alpha u_0^2 p_0\right)}{u}}\right). \tag{E5}$$

Nótese que, a partir de (E5), si $u \to 0^+$, entonces $p_+(u) \to +\infty$. Por el otro lado, si $u \to +\infty$, entonces $p_+(u) \sim \frac{\alpha}{\beta}u$. Esto significa que, la elasticidad definida en (E0) es tal que $E(u) \to -1/2$; además, si la producción aumenta significativamente, la elasticidad $E(u) \to 1^-$, lo cual indica que el precio de producción variará acotadamente. Por lo tanto, existe un número de unidades crítico $u_\star$ tal que la elasticidad $E(u_\star) = 0$. Esto significa que el precio de producción permanecerá sin cambios para $u = u_\star$.