Cálculo Diferencial e Integral III

Regla de la cadena: un ejemplo

El siguiente ejercicio consiste en el cálculo de la segunda derivada parcial para una función $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ respecto a alguna de sus variables independientes, donde supondremos que $\varphi \in C^1$. Esta función está determinada por la composición de la función $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con la función $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; es decir, si $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ y $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = [v_1(\mathbf{x}), \ldots, v_n(\mathbf{x})]^T$, entonces se tiene que $\varphi(\mathbf{x}) = u(\mathbf{v}(\mathbf{x}))$, la cual explícitamente significa que

$$\varphi\left(x_1, \ldots, x_n\right) = u\left(v_1\left(x_1, \ldots, x_n\right), \ldots, v_n\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right) . \tag{1}$$

- Primero, calcularemos la primer derivada parcial de φ con respecto a la variable x_j, donde $j = 1, \ldots, n$. Con este fin, observemos que cada componente de $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ depende de x_j. De este modo, debido al *Teorema de la regla de la cadena*, se tiene que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_j}}_{\text{A}} + \cdots + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}}_{\text{B}} + \cdots + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial v_n}\frac{\partial v_n}{\partial x_j}}_{\text{C}}, \quad \text{donde } i = 2, \ldots, n-1 . \tag{2}$$

  Esta expresión también puede escribirse, de manera compacta, como

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} . \tag{3}$$

  Por otro lado, hay dos consideraciones que hay que mencionar:

  1. La expresion (2) también puede escribirse como el producto siguiente:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \left[\frac{\partial u}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial v_n}\right] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial v_n}{\partial x_j} \end{bmatrix} .$$

  2. El término A en (2) indica: "la derivada parcial de u con respecto a la primer componente de $\mathbf{v}$ por la derivada parcial de la primer componente de $\mathbf{v}$ respecto a x_j". De igual manera, los términos B y C de (2) indican la misma relación; sin embargo, la derivada parcial de u es respecto a la i-ésima y n-ésima componente de $\mathbf{v}$, respectivamente.

- Segundo, la segunda derivada parcial de φ con respecto a la variable x_k, donde $k = 1, \ldots, n$, corresponde a la derivada parcial de (2) respecto x_k; es decir, a partir de (3), calculamos

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial v_i}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)}_{\star}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial v_i}}_{\star\star}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial v_i}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_j}\right)}_{\text{a partir de }\star} = \sum_{i=1}^{n}\left[\underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial v_i^2}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 u}{\partial v_k \partial v_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\right)}_{\text{a partir de }\star\star}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial v_i}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_j}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial v_i^2}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 u}{\partial v_k \partial v_i}\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial v_i}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_j}\right],$$

donde se utiliza la regla de derivación del producto en $\star$ y la regla de la cadena para $\dfrac{\partial u}{\partial v_i}$ en $\star\star$, la cual es una función compuesta como en (1), debido a que u depende de $\mathbf{v}(\mathbf{x})$.

Si consideramos el caso bidimensional, i.e. $n = 2$, entonces

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial v_1^2}\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial v_2^2}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial v_2 \partial v_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2 \partial x_1}. \tag{4}$$

En este mismo escenario, cuando $k = j$, obtenemos que

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial v_1^2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_j}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial v_2^2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_j}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial v_1 \partial v_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_j}\frac{\partial v_2}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_j^2} + \frac{\partial u}{\partial v_2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_j^2}, \quad \text{para } j = 1, 2. \tag{5}$$

De este modo, para la composición en la forma dada en (1), el operador de Laplace está dado por la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} = {} & \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial v_1^2} + \left[\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial v_2^2} + \\ & + 2\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial v_1 \partial v_2} + \\ & + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial u}{\partial v_1} + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}\right)\frac{\partial u}{\partial v_2}.\end{aligned}$$

En particular, la fórmula anterior determina la transformación de la ecuación de Laplace cuando se hace un cambio de coordenadas dadas por la función $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. En otras palabras, esta fórmula es consecuencia de que la función $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ es una transformación del dominio de la función φ en sí mismo.

Por ejemplo, supongamos que $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ donde $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\det \mathbf{A} \neq 0$. De este modo, la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

determina las componentes de $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ como: $v_1(x_1,x_2)=\alpha x_1+\beta x_2$ y $v_2(x_1,x_2)=\gamma x_1+\delta x_2$. En consecuencia, se obtiene que

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}=\alpha\,,\quad \frac{\partial v_1}{\partial x_2}=\beta\,,\quad \frac{\partial v_2}{\partial x_1}=\gamma\,,\quad \frac{\partial v_2}{\partial x_2}=\delta \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_k \partial x_j}=0\,,\quad \text{para } k,j=1,2\,.$$

De esta manera, para $a,b,c\in\mathbb{R}$, tenemos que la ecuación diferencial parcial lineal y homogénea de segundo orden

$$a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+2b\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}+c\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}=0\,, \tag{6}$$

se transforma en

$$\begin{cases} a\left(\alpha^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial v_1^2}+\gamma^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial v_2^2}+2\alpha\gamma\dfrac{\partial^2 u}{\partial v_1\partial v_2}\right)+2b\left(\alpha\beta\dfrac{\partial^2 u}{\partial v_1^2}+\gamma\delta\dfrac{\partial^2 u}{\partial v_2^2}+2\alpha\delta\dfrac{\partial^2 u}{\partial v_2\partial v_1}\right)+ \\ +c\left(\beta^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial v_1^2}+\delta^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial v_2^2}+2\beta\delta\dfrac{\partial^2 u}{\partial v_1\partial v_2}\right) \\ =\left(\alpha^2 a+2\alpha\beta b+\beta^2 c\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial v_1^2}+2\left(\alpha\gamma a+2\alpha\delta b+\beta\delta c\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial v_2\partial v_1}+\left(\gamma^2 a+2\gamma\delta b+\delta^2 c\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial v_2^2}=0\,, \end{cases} \tag{7}$$

como consecuencia de las fórmulas (4) y (5).

Con el fin de determinar una relación entre los coeficientes de (6) y la matriz $\mathbf{A}$, consideremos la matriz $\mathbf{M}\in\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ definida por

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix} \alpha^2 & 2\alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & 4\alpha\delta & 2\beta\delta \\ \gamma^2 & 2\gamma\delta & \delta^2 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz tiene inversa $\mathbf{M}^{-1}$ debido a que la relación $\det\mathbf{M}=4\alpha\delta\det\mathbf{A}^2$ se satisface y, por hipótesis, el $\det\mathbf{A}\neq 0$; por lo tanto, se tiene que

$$\mathbf{M}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{bmatrix} \dfrac{\delta}{\alpha} & -\dfrac{\beta}{2\alpha} & 0 \\ -\dfrac{\gamma}{2\alpha} & \dfrac{\beta\gamma+\alpha\delta}{4\alpha\delta} & -\dfrac{\beta}{2\delta} \\ 0 & -\dfrac{\gamma}{2\delta} & \dfrac{\alpha}{\delta} \end{bmatrix}.$$

De este modo, debido a la ecuación en (7), la ecuación (6) se transforma en la forma canónica:

1. Elíptica: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial v_1^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial v_2^2}=0$, si

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\mathbf{M}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{bmatrix} \dfrac{\delta}{\alpha} \\ -\dfrac{\alpha\beta+\delta\gamma}{2\alpha\delta} \\ \dfrac{\alpha}{\delta} \end{bmatrix}.$$

2. Hiperbólica: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial v_1^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial v_2^2} = 0$, si

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} \dfrac{\delta}{\alpha} \\ \dfrac{\alpha\beta - \delta\gamma}{2\alpha\delta} \\ -\dfrac{\alpha}{\delta} \end{bmatrix}.$$

3. Parabólica: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial v_1 \partial v_2} = 0$, si

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} -\dfrac{\beta}{2\alpha} \\ \dfrac{\beta\gamma + \alpha\delta}{4\alpha\delta} \\ -\dfrac{\gamma}{2\delta} \end{bmatrix}.$$