# Método de Duhamel para sistemas de EDO

**Resumen**

En estas notas deducimos la fórmula que proporciona la solución de un problema de Cauchy de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineal no homogéneo.

## Un problema de Cauchy

El *método de Duhamel*, también conocido como *variación de parámetros*, puede extenderse para encontrar la solución a un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias (SEDO) lineal y no homogéneo; es decir, el problema de Cauchy de la forma

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\mathbf{x}] = \mathbf{f}(t)\,, & t > t_0\,, \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0\,, \end{cases} \quad , \quad \mathcal{L}[\mathbf{x}] := \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}(t)\mathbf{x}\,, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\,, \tag{1}$$

donde $\mathbf{A} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{f} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Como puede verificarse sencillamente, este problema es equivalente a un problema de Cauchy con una EDO de $n$-ésimo orden lineal, no homogénea y con coeficientes que no necesariamente son constantes.

Observemos que, debido a la forma de la EDO en (1) y los métodos para resolver problemas de EDO no homogéneas, la fórmula de la solución tiene la misma forma que en el caso con una sola componente. En otras palabras, como veremos a continuación, la solución puede descomponerse en la suma de la solución para la EDO homogénea y la solución particular, es decir,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t)\,.$$

De este modo, el término $\mathbf{x}_h(t)$ corresponde a una combinación lineal de una base del *núcleo* de $\mathcal{L}$; por el otro lado, $\mathbf{x}_p(t)$ es el elemento del dominio de $\mathcal{L}$ tal que su imagen es $\mathbf{f}(t)$.

Recordemos que si la función $\mathbf{f}(t) \equiv 0$, el problema (1) es reducido a encontrar precisamente $\mathbf{x}_h(t)$. Esto conduce a que, debido a que el espacio de soluciones de la EDO homogénea, $\mathcal{N}$, es vectorial, entonces $\mathbf{x}(t) \equiv 0 \in \mathcal{N}$. Del mismo modo, al considerar una base de $\mathcal{N}$, la cual está dada por el conjunto $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$, tenemos que éste es obligatoriamente linealmente independiente. De esta manera, la matriz formada por los vectores columna $\mathbf{x}_j(t) = [x_{1j}(t), \dots, x_{nj}(t)]^T$, con $j = 1, \dots, n$,

$$\mathbf{M}(t) := [\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)] = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

es conocida como *matriz fundamental*. Como consecuencia, al estar formada por elementos de la base de $\mathcal{N}$, la matriz fundamental es invertible y satisface que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mathbf{M}] = \dot{\mathbf{M}} - \mathbf{A}(t)\mathbf{M} &= [\dot{\mathbf{x}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{x}}_n(t)] - \mathbf{A}(t)\,[\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)] = \\ &= [\dot{\mathbf{x}}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{x}}_n(t)] - [\mathbf{A}(t)\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_n(t)] = \\ &= [\dot{\mathbf{x}}_1(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_1(t), \dots, \dot{\mathbf{x}}_n(t) - \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_n(t)] = \\ &= [\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}] = \mathbf{0}\,. \end{aligned}$$

Para construir la solución del problema (1), el método de Duhamel consiste en tomar en cuenta una matriz fundamental (2) y hacer el cambio de variable $\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}(t)\mathbf{u}(t)$. De esta manera, al sustituir en la ecuación de (1), obtenemos que

$$\mathbf{f}(t) = \mathcal{L}[\mathbf{x}] = \dot{\mathbf{M}}\mathbf{u} + \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{A}(t)\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} + \left(\dot{\mathbf{M}} - \mathbf{A}(t)\mathbf{M}\right)\mathbf{u} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}\,;$$

lo cual quiere decir que $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t)$. Ahora, como consecuencia del Teorema fundamental del cálculo, tenemos que

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{M}^{-1}(\xi)\mathbf{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Observemos que $\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{M}^{-1}(t_0)\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{M}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0$, de tal modo que finalmente obtenemos la solución del problema de Cauchy (1),

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{\mathbf{M}(t)\mathbf{M}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0}_{\mathbf{x}_h(t)} + \underbrace{\mathbf{M}(t)\int_{t_0}^{t} \mathbf{M}^{-1}(\xi)\mathbf{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi}_{\mathbf{x}_p(t)}\,.$$

**Ejemplo 1.** Con el fin de ilustrar el uso de esta fórmula, consideremos el problema de Cauchy con una matriz $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ constante

$$\text{(P)}\left\{\begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(t)}, \quad t > 0\,, \qquad \mathbf{x}(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \end{array}\right.$$

1. Primero tenemos que encontrar una base del problema homogéneo; es decir, consideremos el SEDO

$$\dot{\mathbf{x}} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0}\,. \tag{3}$$

Este sistema es equivalente a dos EDO lineales de segundo orden para cada componente del vector $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$; es decir, tenemos que $\dot{x}_1 - x_2 = 0$ y $\dot{x}_2 + x_1 = 0$, las cuales conducen a $\ddot{x}_{1,2} + x_{1,2} = 0$.
Sin pérdida de generalidad, tenemos que encontrar las raíces del polinomio característico de la EDO $\ddot{x}_1 + x_1 = 0$; es decir, $P_2(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$ se satisface cuando $\lambda_+ = \bar{\lambda}_- = i$. En otras palabras, una combinación lineal de los elementos del conjunto $\{\cos t, \operatorname{sen} t\}$ determinan $x_1(t)$. Por otro lado, debido a que $\dot{x}_2 = -x_1$, tenemos que $x_2(t)$ está dada como una combinación lineal de los elementos del conjunto $\{-\operatorname{sen} t, \cos t\}$. Por lo tanto, la combinación lineal de los vectores

$$\begin{bmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{bmatrix}$$

determinan la solución de (3). De esta manera, la <u>matriz fundamental</u> para el problema (P) está dada por

$$\mathbf{M}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}.$$

En consecuencia,

$$\mathbf{x}_h(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}(t)}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}^{-1}(0)}\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t \\ -(\cos t + \operatorname{sen} t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \\ -\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}.$$

2. A continuación, calculamos la solución particular

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_p(t) &= \underbrace{\begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}(t)} \int_0^t \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\xi & -\operatorname{sen}\xi \\ \operatorname{sen}\xi & \cos\xi \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}^{-1}(\xi)} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \xi \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(\xi)} \mathrm{d}\xi = \\
&= \begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} -\xi\operatorname{sen}\xi \\ \xi\cos\xi \end{bmatrix} \mathrm{d}\xi = \\
&= \int_0^t \begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\xi\operatorname{sen}\xi \\ \xi\cos\xi \end{bmatrix} \mathrm{d}\xi = \\
&= \int_0^t \begin{bmatrix} \xi\left(\operatorname{sen} t\cos\xi - \cos t\operatorname{sen}\xi\right) \\ \xi\left(\cos t\cos\xi + \operatorname{sen} t\operatorname{sen}\xi\right) \end{bmatrix} \mathrm{d}\xi = \\
&= \begin{bmatrix} \displaystyle\int_0^t \xi\operatorname{sen}\left(t-\xi\right)\,\mathrm{d}\xi \\ \displaystyle\int_0^t \xi\cos\left(t-\xi\right)\,\mathrm{d}\xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

donde en la última igualdad se obtiene al integrar por partes en ambas componentes.

Por lo tanto, la solución de (P) está dada por

$$
\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} t + \cos\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ 1 - \cos\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}.
$$