Cálculo de Probabilidades I

Cuaderno de Ejercicios

Ernesto Barrios Z.   Montserrat Heiras G.

2 de enero de 2024

Versión 1.34

Índice

Prefacio

Los ejercicios en este documento consisten en problemas teóricos y de cálculo de probabilidades seleccionados de varios textos para apoyar el curso de Cálculo de Probabilidades I impartido en ITAM.

La mayoría de los problemas tienen la referencia a los libros de donde fueron tomados. La ficha bibliográfica completa se incluye al final del documento. Aquellos que no tienen referencia es porque no recordamos de dónde fueron extraídos o bien son de nuestra autoría.

Al final de los problemas se han incluido las respuestas y en algunos casos ayudas en la solución de los mismos.

Cualquier comentario y/o sugerencia será bienvenido. Diríjalo a Ernesto Barrios `<ebarrios at itam.mx>`.

Ciudad de México, 18 de enero de 2022

1. Espacios de Probabilidad

1. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 1.1) Sea $(\Omega, \mathcal{S}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad donde $\mathcal{S}$ es una σ-algebra de subconjuntos de Ω y $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad que asigna probabilidad $p(> 0)$ a cada uno de los puntos de Ω.

   a) Muestre que Ω debe tener un número finito de puntos. (*Sugerencia*: muestre que Ω no puede tener más de $1/p$ puntos.)

   b) Muestre que si n es el número de puntos de Ω, entonces p debe ser $1/n$.

2. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 1.2) Un modelo de una ruleta puede construirse tomando un espacio de probabilidad **uniforme** sobre una circunferencia de radio 1, de manera que la probabilidad de que el apuntador caiga en una arco de longitud s es $s/2\pi$. Suponga que el círculo se divide en 37 zonas numeradas $1, 2, \ldots, 37$. Calcule la probabilidad de que la ruleta caiga en una zona par.

3. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 1.8) Suponga que los eventos A y B son tales que $\mathbb{P}(A) = 2/5,\ \mathbb{P}(B) = 2/5,\ \mathbb{P}(A \cup B) = 1/2$. Encuentre $\mathbb{P}(A \cap B)$.

4. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 1.9) Si $\mathbb{P}(A) = 1/3,\ \mathbb{P}(A \cup B) = 1/2$ y $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$, encuentre $\mathbb{P}(B)$.

5. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 1.10) Suponga que se elige un punto al azar del cuadrado unitario. Sea A el evento que determinado por el triángulo formado por las líneas $y = 0,\ x = 1,\ x = y$, y sea B el evento definido por el rectángulo de vértices $(0, 0),\ (1, 0),\ (1, 1/2),\ (0, 1/2)$. Calcule $\mathbb{P}(A \cup B)$ y $\mathbb{P}(A \cap B)$.

6. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 1.11) Una caja tiene 10 bolas numeradas $1, 2, \ldots, 10$. Una bola se elige al azar y una segunda bola se elige de las 9 restantes. Encuentre la probabilidad de que los números de las 2 bolas difiera en 2 o más.

7. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 1.12) Si se sabe que un punto seleccionado al azar en el cuadrado unitario está en el triángulo acotado por $x = 0,\ y = 0$ y $x + y = 1$, encuentre la probabilidad de que el punto esté también en el triángulo acotado por $y = 0,\ x = 1$ y $x = y$.

8. ((Ross 2006) Ej. 2.2) Un experimento aleatorio consiste en lanzar un dado hasta que salga un 6. En ese momento el experimento termina. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento? Sea E_n el evento de n lanzamientos son necesarios para completar el experimento. ¿Qué puntos del espacio muestral pertenecen a E_n? ¿Qué es $(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^c$?

9. ((Ross 2006) Ej. 2.4) Los jugadores A, B, C lanzan una moneda por turnos. El primero en obtener un águila gana. El espacio muestral del experimento puede ser definido por

$$\Omega = \begin{cases} 1, 01, 001, 0001, \ldots \\ 0000\ldots \end{cases}$$

   a) Interprete el espacio muestral Ω.

   b) Defina los siguientes eventos en términos de Ω:

   i) A={A gana}

   ii) B={B gana}

iii) $(A \cup B)^c$

10. ((Ross 2006) Ej. 2.5) Un sistema consiste de 5 componentes, las cuales están trabajando apropiadamente o están fallando. Considere el experimento de observar el estado de cada una de las componentes y sea la salida del experimento un vector de la forma $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, donde x_i es 0 ó 1, dependiendo de que la componente i-ésima ($i = 1, \ldots, 5$) ha fallado o está trabajando, respectivamente.

    a) ¿Cuántos elementos hay en el espacio muestral?

    b) Suponga que el sistema trabaja si 1 y 2 trabajan, o si las componentes 3 y 4 están ambas trabajando, o bien, si las componentes 1, 3 y 5 están todas trabajando. Sea W el evento *el sistema funciona*. Especifique todos los elementos de W.

    c) Sea A el evento *las componentes 4 y 5 han fallado*. ¿Cuántos elementos tiene el evento A?

11. ((Ross 2006) Ej. 2.10) Sesenta por ciento de los estudiantes de cierta escuela no usa ni anillos ni collares. Veinte por ciento usa anillo y treinta por ciento usa collar. Si un alumno es elegido al azar, indique la probabilidad de que:

    a) use un anillo o un collar.

    b) use un anillo y un collar.

12. ((Parzen 1960) Ej. 1.5.10) En una batalla sangrienta luchaban 270 hombres. 90 de ellos perdieron un ojo; 90 un brazo y 90 una pierna; 30 perdieron un ojo y un brazo; 30 un brazo y una pierna; 30 una pierna y un ojo; y 10 perdieron un ojo, un brazo y una pierna.

    a) ¿Cuántos hombres no perdieron nada?

    b) ¿Cuántos tuvieron exactamente una lesión?, ¿dos?, ¿tres?

    c) ¿Cuántos tuvieron al menos una lesión?, ¿dos?, ¿tres?

    d) ¿Cuántos tuvieron no más de una lesión?, ¿dos?, ¿tres?

13. ((Ross 2006) Ej. 2.12) Una escuela ofrece clases de tres idiomas: inglés, francés y alemán. Las clases están abiertas a todos los 100 estudiantes en la escuela. Hay 28 alumnos en la clase de inglés, 26 en la de francés y 16 en la de alemán. Hay 12 estudiantes llevando inglés y francés, 4 llevando inglés y alemán y 6 cursando alemán y francés. Hay además 3 estudiantes llevando los 3 idiomas.

    a) Si se elige al azar un estudiante, ¿cuál es la probabilidad de que no esté llevando ninguno de los idiomas?

    b) Si se selecciona aleatoriamente un estudiante, ¿cuál es la probabilidad de que esté estudiando un idioma exactamente?

    c) Si 2 estudiantes se seleccionan al azar, calcule la probabilidad de que al menos uno esté llevando una clase de idiomas.

14. ((Ross 2006) Ej. 2.25)

    a) Se lanzan un par de dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la salida del segundo dado sea mayor que la del primero?

    b) Se lanzan un par de dados hasta que sale un 5 ó un 7. ¿Cuál es la probabilidad de que salga primero el 5?

15. ((Ross 2006) Ej. 2.33) En un bosque hay 20 alces, de los cuales 5 fueron capturados, marcados y liberados. Cierto tiempo después 4 de los 20 alces fueron capturados. ¿Cuál es la probabilidad de que 2 de estos 4 alces hayan sido marcados anteriormente? ¿Qué supuesto está haciendo para sus cálculos?

16. ((Ross 2006) Ej. 2.45) Una chica tiene n llaves, de las que una de ellas abrirá la puerta de su casa.

    a) Si elige al azar las llaves, sin considerar las que ya ha probado, ¿cuál es la probabilidad de que finalmente abra la puerta hasta el k-ésimo ensayo?

    b) ¿Y cuál si ella no descarta las llaves que ya ha probado?

17. ((Ross 2006) Theo. Ej. 2.9) Suponga que un experimento se realiza n veces. Para cualquier evento E del espacio muestral, sea $n(E)$ el número de veces que E ocurre, y defina $f(E) = n(E)/n$. Muestre que f es una medida de probabilidad. (Es decir, satisface los Axiomas de la Probabilidad.)

18. ((Ross 2006) Theo. Ej. 2.11) Si $\mathbb{P}(E) = 0.9$ y $\mathbb{P}(F) = 0.8$, muestre que $\mathbb{P}(E \cap F) \geq 0.7$. En general, pruebe la *desigualdad de Bonferroni*,

$$\mathbb{P}(E \cap F) \geq \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - 1$$

19. ((Ross 2006) Theo. Ej. 2.20) Considere un experimento cuyo espacio muestral consiste en un número infinito contable de puntos, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$. Muestre que no todo ω_i puede ser igualmente probables. ¿Puede suceder que cada uno de los puntos tenga una probabilidad positiva?

20. ((Ross 2006) Self test 2.14) Pruebe la *desigualdad de Boole.*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mathbb{P}(A_n)$$

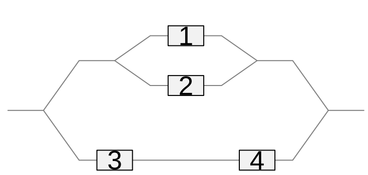
21. ((Ross 2006) Self test 2.15) Considere una sucesión de eventos $A_1, A_2, \ldots$ Muestre que si $\mathbb{P}(A_i) = 1$, para todo $i \geq 1$, entonces $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$.

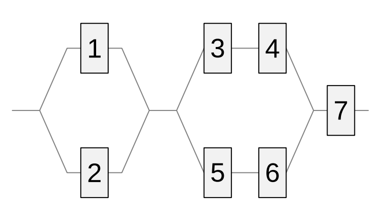
22. ((Bartle 1966) Ej. 2.2c) Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de los números naturales y considere $C_I = \{1,3,5,\ldots\}$ y $C_P = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Muestre que la familia $\mathcal{F} = \{\emptyset, C_I, C_P, \mathbb{N}\}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{N}$.

23. Sea D un conjunto de Borel en los reales, esto es, $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Muestre que la familia $\mathcal{B}(D) = \{A \cap D : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de D con la condición de que si $B \in \mathcal{B}(D)$, $B^C := B^C \cap D = D \backslash B$.

24. ((Bartle 1966) Ej. 2.2e) Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ dos σ-álgebras de subconjuntos del espacio muestral Ω y sea $\mathcal{F}$ la intersección de $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$, esto es, $\mathcal{F}$ contiene a todos los subconjuntos de Ω tales que son miembros de $\mathcal{F}_1$ y de $\mathcal{F}_2$. Muestre que $\mathcal{F}$ es también una σ-álgebra de subconjuntos de Ω.

25. ((Devore 1995) Ej. 2.76,2.81) Los siguientes diagramas consideran distintas configuraciones de componentes.





a) En el panel de la izquierda, las componentes 1 y 2 constituyen un **arreglo paralelo**, así el subsistema trabaja si alguna de las componentes trabaja. Las componentes 3 y 4 constituyen un **arreglo en serie**, así el subsistema trabaja si y solo si todos los componentes trabajan. Si las componentes trabajan *independientemente* una de otra y la probabilidad de que trabaje es de 0.90, encuentre la probabilidad de que el sistema funcione.

b) Bajo las mismas condiciones del inciso anterior, ¿cuál es la probabilidad de que funcione el sistema que se muestra en el panel de la derecha?

2. Técnicas de Conteo

1. *a*) ¿Cuántas placas de automóvil de 7 posiciones son posibles si las primeras 2 posiciones son para letras (26) y las últimas 5 posiciones para dígitos (10)?

   b) Repita el inciso anterior si no es posible repetir letras o dígitos en la misma placa.

2. ((Ross 2006) Ex. 1.10) De cuántas maneras se pueden sentar 8 personas en una fila si:

   a) No hay ninguna restricción.

   b) Si la personas A y B se deben sentar juntas.

   c) Si son 4 hombres y 4 mujeres, y 2 hombres o 2 mujeres no se deben sentar juntos.

   d) Si hay 5 hombres y ellos se deben sentar juntos.

   e) Si son 4 parejas casadas y ellas se deben sentar juntas.

   f) Si X y Y no pueden quedar juntos.

3. ((Ross 2006) Ex. 1.13) Una clase de baile consiste de 22 alumnos, 10 mujeres y 12 hombres. Si 5 hombres y 5 mujeres son elegidos y se hacen parejas, ¿cuántas distintas parejas se pueden formar?

4. ((Ross 2006) Ex. 1.20)Una persona tiene 8 amigos de los cuales 5 serán invitados a una reunión.

   a) ¿Cuántas distintas elecciones hay si 2 de los amigos están molestos entre ellos y no asistirían juntos?

   b) ¿Cuántas distintas elecciones hay si 2 amigos asistirían solamente si ambos son invitados?

5. Considere un juego de poker. Hay cuatro tipos de cartas: corazones, diamantes, tréboles y espadas. Hay 13 números: $2, 3, \ldots, 9, 10, J, Q, K, A$. Una corrida de 5 cartas puede ser: $A, 2, 3, 4, 5$; $2, 3, 4, 5, 6$; $\ldots$; $10, J, Q, K, A$. Calcule la probabilidad de cada una de las siguientes manos:

   a) *Royal flush*: $(10, J, Q, R, A)$ del mismo tipo.

   b) *Straight flush*: 5 cartas consecutivas del mismo tipo.

   c) *Poker*: (x, x, x, x, y), con $x \neq y$.

   d) *Full house*: de la forma (x, x, x, y, y), con $x \neq y$.

   e) *Flush*: 5 cartas del mismo tipo.

   f) *Straight*: 5 cartas consecutivas independientemente del tipo.

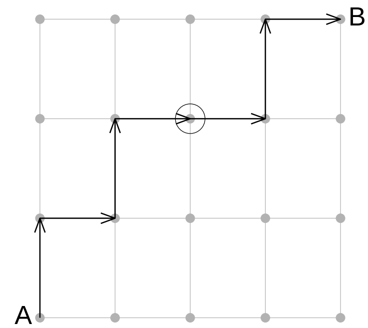
   g) *Tercia*: (x, x, x, y, z), con $x \neq y, z$; $y \neq z$.

   h) *Dos pares*: (x, x, y, y, z), con $x \neq y, z$; $y \neq z$.

i) *Un par*: (x, x, y, z, w), $x \neq y, z, w$; $y \neq z, w$; $z \neq w$.

6. *a*) ((Ross 2006) Ex. 1.21) Considere la red de puntos mostrada a la derecha. Suponga que comenzando en el punto A usted puede ir hacia arriba o la derecha paso por paso. Esto se continúa hasta que alcanza el punto B. ¿Cuántas trayectorias A-B distintas existen? *Sugerencia*: Note que para alcanzar el punto B desde A debe dar 4 pasos a la derecha y 3 hacia arriba.

   b) ¿Cuántas trayectorias distintas A-B que pasen por el punto señalado existen?



7. ((Ross 2006) Ex. 1.30) Delegados de 10 países, incluyendo Rusia, Francia, Inglaterra y E.E.U.U. se sentarán en una fila. ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse si los delegados de Francia e Inglaterra *deben* sentarse juntos y los de Rusia y E.E.U.U. *no deben* estar juntos?

8. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ex. 2.17) Suponga que de una población de r elementos se toma una muestra aleatoria de tamaño n. Encuentre la probabilidad de que ninguno de k elementos específicos estén en la muestra si el método usado es:

   a) muestreo con reemplazo.

   b) muestreo sin reemplazo.

9. Determine el número de distintos arreglos $(x_1, \ldots, x_n)$, tales que x_i es 0 ó 1 y

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k$$

10. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ex. 2.20) Muestre que

$$\frac{\binom{n}{k}\binom{r-n}{m-k}}{\binom{r}{m}} = \frac{\binom{m}{k}\binom{r-m}{n-k}}{\binom{r}{n}}$$

11. *a*) ((Ross 2006) Theo. Ex. 1.8) Muestre que

$$\binom{n+m}{k} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}$$

   Sugerencia: Considere un grupo de n hombres y m mujeres. ¿Cuántos distintos grupos de tamaño k son posibles?

   b) Use el inciso anterior para probar que

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

12. En un centro de cómputo, un servidor tiene 3 procesadores para recibir n tareas. Las tareas se asignan a los procesadores de manera aleatoria de tal forma que hay 3^n asignaciones posibles. Determina la probabilidad de que *exactamente* a uno de los procesadores no le sea asignada ninguna tarea.

13. Un cargamento tiene 20 paquetes de los cuales 7 están dañados. Los paquetes son inspeccionados uno a uno sin reemplazo hasta que se encuentra el cuarto paquete dañado. Calcule la probabilidad de que se requiera inspeccionar exactamente 12 paquetes. Justifique su respuesta.

3. Probabilidad Condicional

1. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 2.71) Sean A y B eventos tales que $\mathbb{P}(A) = 0.5$, $\mathbb{P}(B) = 0.3$ y $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.1$. Calcule las siguientes probabilidades:

   a) $\mathbb{P}(A|B)$.

   b) $\mathbb{P}(B|A)$.

   c) $\mathbb{P}(A|A \cup B)$.

   d) $\mathbb{P}(A|A \cap B)$.

   e) $\mathbb{P}(A \cap B|A \cup B)$.

2. ((Ross 2006) Ej. 3.1) Se tiran dos dados. Si los valores obtenidos en los dados son diferentes entre sí, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos caiga en 6?

3. Sean A, B, C y D eventos tales que $B = A^c$, $C \cap D = \emptyset$, con $\mathbb{P}(A) = 1/4, \mathbb{P}(B) = 3/4$ y
$$\mathbb{P}(C|A) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(C|B) = \frac{3}{4}, \quad \mathbb{P}(D|A) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(D|B) = \frac{1}{8}$$
   Calcule $\mathbb{P}(C \cup D)$.

4. ((Walpole, Myers, Myers, and Ye 2007) Ej. 2.41) En una planta de manufacturas hay tres líneas de producción A, B y C que producen 30 %, 45 % y 25 % de la producción total. Se sabe por experiencia de los últimos años que las líneas tienen una tasa de defectuosos del 2 %, 3 % y 2 % respectivamente. Suponga ahora que se elige de la planta un artículo al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

5. ((Walpole, Myers, Myers, and Ye 2007) Ej. 2.43) Una firma farmacéutica utiliza tres planes analíticos para el diseño y desarrollo de un producto en particular. Por razones de costos, los tres planes son usado en distintos tiempos. De hecho, los planes 1, 2 y 3 son usados en 30 %, 20 % y 50 % de los productos respectivamente. La *tasa de defectuosos* son diferentes para las distintas planes. A saber,
$$\mathbb{P}(D|E_1) = 0.01, \qquad \mathbb{P}(D|E_2) = 0.03, \qquad \mathbb{P}(D|E_3) = 0.02$$
   donde $\mathbb{P}(D|E_j)$ es la probabilidad de un producto defectuoso bajo el j-ésimo plan. Si se selecciona un producto al azar y se ve que es defectuosos, ¿bajo cuál de los planes es más posible que haya sido producido?

6. ((Devore 1995) Ej. 2.63) Para clientes que han comprado un juego de llantas completo considere los siguientes eventos: $A = \{\text{Las llantas fueron producidas en E.U.}\}$; $B = \{\text{Se hizo balanceo}\}$; $C = \{\text{Se hizo alineación}\}$. Suponga las siguientes probabilidades: $\mathbb{P}(A) = 0.75$, $\mathbb{P}(B|A) = 0.9$, $\mathbb{P}(B|A^c) = .8$, $\mathbb{P}(C|A \cap B) = 0.8$, $\mathbb{P}(C|A \cap B^c) = 0.6$, $\mathbb{P}(C|A^c \cap B) = 0.7$, $\mathbb{P}(C|A^c \cap B^c) = 0.3$. Calcule

   a) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

   b) $\mathbb{P}(B \cap C)$.

   c) $\mathbb{P}(C)$.

   d) Calcule $\mathbb{P}(A|B \cap C)$. Interprete el resultado.

7. ((Ross 2006) Ej. 3.5.b) Una chimpancé ha parido un cachorro y no se sabe de cuál de los 2 chimpancés machos sea el padre. Se cree que el macho 1 es el padre con una probabilidad p y del macho 2 con probabilidad $1 - p$. Se toman muestras del DNA de

ambos macho y la madre. Un marcador genético muestra que la madre tiene la pareja de genes (A, A). El macho 1 tiene la pareja (a, a) y el macho 2 la pareja (A, a). Si resultase que el cachorro tiene la pareja de genes (A, a), muestre que la probabilidad de que el macho 1 sea el padre es de $2p/(1+p)$.

8. ((Ross 2006) Ej. 3.29) En una caja hay 15 pelotas de tenis de las cuales 9 nunca han sido utilizadas. Se escogen tres pelotas al azar, se juega con ellas y al finalizar las pelotas se regresan a la caja. Al día siguiente se seleccionan de la caja nuevamente tres pelotas al azar. [Muestre sus resultados con al menos cuatro decimales.]

   a) Calcule la probabilidad de que ninguna de estas 3 pelotas haya sido utilizada anteriormente. [Sugerencia: considere el teorema de probabilidad total.]

   b) Si sabe que las tres pelotas del segundo día son nuevas, ¿cuál es la probabilidad de que en el juego del día anterior dos de las tres pelotas ya hubieran sido usadas?

9. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 2.119) Recuerde el siguiente ejemplo visto de la primera sección. Suponga que se lanzan repetidamente dos dados y se cuenta la suma de las caras hacia arriba en cada lanzamiento. Considerando argumentos de probabilidad condicional determine la probabilidad de que la suma 3 sale antes que la suma 7.

10. Una máquina trabaja con tres diferentes motores. Si ningún motor está descompuesto entonces es seguro que la máquina siga trabajando; si se descompone un solo motor, entonces la máquina trabaja con una probabilidad de 0.7; si se descomponen exactamente dos motores la máquina trabaja con una probabilidad de 0.49; si se descomponen los tres motores entonces es imposible que la máquina trabaje. Con base en la experiencia se estima que:

La probabilidad de que no se descomponga ningún motor es:	0.562
La probabilidad de que se descomponga un solo motor es:	0.403
La probabilidad de que se descompongan dos motores es:	0.032
La probabilidad de que se descompongan los tres motores es:	0.003

    Si la maquina está trabajando, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de los tres motores se descompongan?

11. En un experimento de laboratorio se intenta enseñar a un animal a dar vuelta a la derecha dentro de un laberinto. A manera de incentivo, el animal es premiado si da vuelta a la derecha y castigado si la da a la izquierda. En el primer intento, la probabilidad de que el animal gire a la izquierda es la misma que a la derecha. Si en cualquier intento el animal fue premiado, la probabilidad de que gire a la derecha en el siguiente intento es $p_1 > 1/2$, y si el animal fue castigado, la probabilidad de que gire a la derecha en el siguiente intento es $p_2 > p_1$.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que el animal gire a la derecha en el tercer intento?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que el animal gire a la derecha en el tercer intento, dado que dió vuelta a la derecha en el primer intento?

4. Variables Aleatorias

4.1. Funciones de distribución, masa y densidad de probabilidades

1. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 3.1) Cualquier punto en el intervalo [0,1) puede ser representado por su expansión decimal $.x_1x_2\cdots$. Suponga que un punto de este

intervalo es escogido al azar. Sea X el primer dígito de la expansión decimal que representa al punto. Determine la función masa de probabilidad (*f. m. p.*) de X.

2. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 3.3) Considere una caja que tenga 6 bolas rojas y 4 bolas negras. Una muestra aleatoria de tamaño n es seleccionada. Sea X el número de bolas rojas seleccionadas. Calcule la *f. m. p.* de X si la muestra se toma:

   a) Sin reemplazo, donde $n \leq 6$.

   b) Con reemplazo, para $n = 1, 2, \ldots$

3. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 3.4) Sea n un entero positivo fijo y sea

$$f(x) = \begin{cases} c2^x & x = 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Encuentre el valor c, tal que f sea una función de probabilidad.

4. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 3.5) Suponga X como una variable aleatoria que tiene función masa de probabilidad f dada por:

x	-3	-1	0	1	2	3	5	8
$f(x)$	.1	.2	.15	.2	.1	.15	.05	.05

   Calcule las siguientes probabilidades:

   a) X es negativa;

   b) X es par(incluye negativos);

   c) X toma valores entre 1 y 8, incluyéndolos;

   d) $\mathbb{P}(X = -3 | X \leq 0)$;

   e) $\mathbb{P}(X \geq 3 | X > 0)$.

5. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 3.7) Sea X uniformemente distribuida en $0, 1, \ldots, 99$. Calcule:

   a) $\mathbb{P}(X \geq 25)$

   b) $\mathbb{P}(2.6 < X < 12.2)$

   c) $\mathbb{P}(8 < X \leq 10 \cup 30 < X \leq 32)$

   d) $\mathbb{P}(25 \leq X \leq 30)$

6. Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad acumulada F dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{3x}{5} & 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ \frac{1+3x}{5} & \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \\ \frac{2+3x}{5} & \frac{2}{3} \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

   a) Calcule $\mathbb{P}(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4})$.

   b) Verifique que $\mathbb{P}(X = \frac{1}{3}) + \mathbb{P}(X = \frac{1}{2}) = 0.2$.

7. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 3.8) Considere una caja que tiene 12 bolas marcadas con los números $1, 2, \ldots, 12$. Dos realizaciones independientes son hechas del experimento de seleccionar una bola de la caja al azar (selección con reemplazo). Sea X el mayor de los números de las bolas seleccionadas. Calcule la *f. m. p.* de X.

8. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 3.9) Suponga la misma situación del ejercicio anterior, pero ahora se efectúa una selección sin reemplazo. Calcule la *f. m. p.* de X.

9. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 3.12) Suponga una caja que tiene r bolas enumeradas $1, 2, \ldots, r$. Una muestra aleatoria de tamaño n es seleccionada sin reemplazo. Sea Y el mayor de los números de las bolas seleccionadas y sea Z el menor de estos números.

   a) Calcule la probabilidad $\mathbb{P}(Y \leq y)$.

   b) Calcule la probabilidad $\mathbb{P}(Z \geq z)$.

10. ((Ross 2006) Ej. 4.5, 4.6) Sea X la diferencia entre el número de soles y el número de águilas obtenidos mediante n volados de una moneda justa.

    a) ¿Cuáles son los valores posibles de X?

    b) Para $n = 3$, calcule la *f. m. p.* de X.

11. ((Ross 2006) Ej. 4.7, 4.8) Suponga que un dado justo es lanzado dos veces. Muestre los valores posibles de las siguientes variables aleatorias y calcule su correspondiente *f. m. p.*

    a) El valor máximo de las caras obtenidas.

    b) El valor mínimo de las caras obtenidas.

    c) La suma de las caras obtenidas.

    d) El valor de la primera cara obtenida, menos el valor de la segunda cara obtenida.

12. ((Ross 2006) Ej. 4.20) Un libro de apuestas recomienda la siguiente estrategia para ganar en el juego de la ruleta:

    > En principio, apostar \$1 al rojo. Si el rojo aparece (lo cual ocurre con una probabilidad de $\frac{18}{38}$), entonces tomar la ganancia y retirarse. En caso que el rojo no aparezca (lo cual ocurre con una probabilidad de $\frac{20}{38}$), se debe hacer una apuesta adicional de \$1 al rojo durante las siguientes dos rondas y después retirarse.

    Sea X la variable aleatoria que denota la ganancia del jugador cuando éste se retira (en caso de que sea una pérdida, X será negativa).

    a) Calcule $\mathbb{P}(X > 0)$.

    b) ¿Estaría usted convencido de que ésta es una buena estrategia para ganar? Discuta.

13. ((Ross 2006) Theo. Ej. 4.1) Suponga que hay N distintos tipos de cupones. Un cupón de tipo i tiene probabilidad $p_i, i = 1, 2, \ldots, N$ de ser electo, independientemente de las elecciones que hayan ocurrido anteriormente. Sea T el número (aleatorio) de elecciones necesarias para obtener al menos un cupón de cada tipo. Calcule $\mathbb{P}(T = n)$.

14. ((Ross 2006) Self Test 4.23) Una urna tiene inicialmente N bolas blancas y M bolas negras. Las bolas son sacadas al azar sin reemplazo. Encuentra la probabilidad de que n bolas blancas sean sacadas antes de haber sacado m bolas negras, $n \leq N$, $m \leq M$.

15. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 5.2) Suponga un punto elegido al azar del interior de un disco de radio R situado en el plano. Sea X una variable aleatoria (*v. a.*) que denota el cuadrado de la distancia que existe entre el punto escogido y el centro del disco. Encuentre la función de probabilidad acumulada (*f. p. a.*) y la función de densidad de probabilidades (*f. d. p.*) de X.

16. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 5.6) Considere un triángulo equilátero cuyos lados tienen longitud s. Suponga un punto elegido al azar en uno de los lados del triángulo. Sea X la *v. a.* que denota la distancia entre el punto elegido y el vértice opuesto. Encuentre la *f. p. a.* y la *f. d. p.* de X.

17. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 5.7) Considere el punto $P = (u, v)$ elegido al azar en el cuadrado $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$. Sea X la *v. a.* que se calcula a partir del punto P como $X = u + v$.

    a) Encuentre la *f. p. a.* de X.

    b) Encuentre la *f. d. p.* de X.

18. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 5.20) Sea X distribuida uniformemente en el intervalo $(0, 1)$. Encuentre la *f. d. p.* de $Y = X^{1/\beta}$, donde $\beta \neq 0$.

19. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 5.22) Sean X una *v. a.* , g una función de densidad con respecto a la integración y φ una función diferenciable estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Suponga que

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\varphi(x)} g(z)dz, \qquad -\infty < x < \infty.$$

    Muestre que la *v. a.* $Y = \varphi(X)$ tiene función de densidad g.

20. ((Ross 2006) Ej. 5.5) Considere una gasolinera que es abastecida una vez por semana. Suponga que el volumen de ventas semanal, medido en miles de galones, es una *v. a.* cuya *f. d. p.* es

$$f(x) = 5(1 - x)^4 I_{(0,1)}(x)$$

    ¿Cuál debería ser la capacidad del tanque para lograr que la probabilidad de que el evento en el que la gasolinera queda desabastecida ocurra con una probabilidad de 0.01?

21. ((Ross 2006) Ej. 5.10) Los trenes asignados al destino A llegan a la estación en un intervalo de 15 minutos iniciando a las 7:00 hrs. mientras que los trenes asignados al destino B arriban a la estación en intervalos de 15 minutos iniciando a las 7:05 hrs.

    - Si un pasajero determinado arriba a la estación en un tiempo uniformemente distribuido entre las 7:00 y las 8:00 hrs. y se sube al primer tren que arriba, ¿qué proporción de tiempo irá al destino A?
    - ¿Cuál sería la proporción si el pasajero arriba a la estación en un tiempo uniformemente distribuido entre las 7:10 y las 8:10 hrs.?

22. ((Ross 2006) Ej. 5.11) Un punto es escogido al azar de un segmento de recta de longitud L. Encuentre la probabilidad de que la proporción del segmento más corto contra el más largo sea menor a $\frac{1}{4}$.

23. ((Ross 2006) Ej. Self Test 5.7) Considere un juego en el cual para ganarlo debe de tener éxito en tres rondas consecutivas. El juego depende del valor de U, que es una *v. a.* distribuida uniformemente en el intervalo $(0, 1)$. Si $U > 0.1$, entonces se gana la primera ronda; si $U > 0.2$, se gana la segunda ronda; y si $U > 0.3$, entonces se gana la tercera ronda.

    a) Calcule la probabilidad de éxito en la primera ronda.

    b) Calcule la probabilidad condicional de tener éxito en la segunda ronda, dado que tuvo éxito en la primera ronda.

    c) Calcule la probabilidad condicional de tener éxito en la tercera ronda, dado que tuvo éxito en la primera y segunda ronda.

    d) Calcule la probabilidad de ser un ganador en el juego.

4.2. Tasa de riesgo o falla

Sea T una variable aleatoria (*v. a.*) positiva que denota el *tiempo de falla* de algunos sistemas, F denota la función de distribución de T y suponga que $F(t) < 1$ para $0 < t < \infty$. Entonces se puede escribir $F(t) = 1 - e^{-\Lambda(t)},\ t > 0$, para alguna función Λ. Suponga además que existe $\Lambda'(t) = \lambda(t)$ para $t > 0$.

24. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 5.40) Muestre que T tiene una densidad f que satisface:
$$\frac{f(t)}{1 - F(t)} = \lambda(t), \qquad 0 < t < \infty$$
La función λ es conocida como *tasa de riesgo* o *tasa de fallo*, pues de manera heurística se tiene que
$$\mathbb{P}(t \leq T \leq t + dt | T > t) \approx \frac{f(t)dt}{1 - F(t)} = \lambda(t)dt$$

25. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 5.40) Muestre que para $s > 0$ y $t > 0$,
$$\mathbb{P}(T > t + s | T > t) = e^{-\int_t^{t+s} \lambda(u)du}. \tag{1}$$

26. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 5.40) Muestre que el sistema "mejora con el tiempo", es decir, para $s > 0$ fijo, la expresión (1) es creciente en t si λ es una función decreciente, y que el sistema se "deteriora con el tiempo" si λ es una función creciente.

27. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 5.40) Muestre que
$$\int_0^\infty \lambda(u)du = \infty$$

28. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 5.40) Discuta cómo se comporta la función tasa de riesgo λ si la *v. a.* T sigue una *distribución exponencial*. Es decir, si $F_T(t) = 1 - e^{-\beta t}$, para algún $\beta > 0$ y consecuentemente $f_T(t) = \beta e^{-\beta t}$, con $t \geq 0$.

29. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 5.40) Si $\Lambda(t) = \beta t^\alpha$ para $t > 0$, ¿para qué valores de α el sistema mejora, se deteriora o se mantiene igual en el tiempo?

30. ((Ross 2006) Ej. 5.5.1) Suponga ahora una función de tasa de fallo lineal $\lambda(t) = a + bt$. Muestre entonces que la correspondiente función de distribución está dada por
$$F(t) = 1 - e^{-(at + bt^2/2)}, \quad t > 0$$
y por diferenciación, se tiene la correspondiente función de densidad.
$$f(t) = (a + bt)e^{-(at + bt^2/2)}, \quad t > 0$$

¿Qué significa cuando se dice que los fumadores tienen una *tasa de mortalidad* dos veces mayor que el de los no-fumadores?

Sean $\lambda_S(t)$ y $\lambda_N(t)$ que denoten la *tasa de riesgo* a la edad t de un fumador y un no-fumador respectivamente. Entonces, la afirmación anterior, se puede expresar como
$$\lambda_S(t) = 2\lambda_N(t)$$
Considere T_N y T_S las variables aleatorias que representan la edad de una persona no-fumadora y una fumadora con funciones de distribución F_N y F_S, respectivamente. Entonces,

la probabilidad de que un no-fumador sobreviva a la edad t_2 dado que ha alcanzado una edad t_1, estaría dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\text{Un no fumador de edad } t_1 \text{ alcance la edad } t_2\} &= \mathbb{P}\{T_N > t_2 | T_N > t_1\} \\
&= \frac{1 - F_N(t_2)}{1 - F_N(t1)} \\
&= \frac{\exp\{-\int_0^{t_2} \lambda_N(t)dt\}}{\exp\{-\int_0^{t_1} \lambda_N(t)dt\}} \\
&= \exp\left\{-\int_{t_1}^{t_2} \lambda_N(t)dt\right\}
\end{aligned}$$

Mientras que la probabilidad de sobrevivencia de un fumador es, siguiendo el mismo procedimiento,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\text{Un fumador de edad } t_1 \text{ alcance la edad } t_2\} &= \mathbb{P}\{T_S > t_2 | T_S > t_1\} \\
&= \exp\left\{-\int_{t_1}^{t_2} \lambda_S(t)dt\right\} \\
&= \exp\left\{-2\int_{t_1}^{t_2} \lambda_N(t)dt\right\} \\
&= \left[\exp\left\{-\int_{t_1}^{t_2} \lambda_N(t)dt\right\}\right]^2
\end{aligned}$$

En otras palabras, para dos personas de la misma edad, una fumadora y la otra no fumadora, la probabilidad de que la persona fumadora sobreviva cierta edad es el *cuadrado*, que no la mitad, de la correspondiente probabilidad de sobrevivencia de una persona no-fumadora. Por ejemplo, si $\lambda_N(t) = \frac{1}{30}, \quad 50 \leq t \leq 60$, entonces, la probabilidad de que una persona de 50 años no fumadora alcance la edad de 60 años es de $e^{-1/3} \approx 0.7165$, mientras que la correspondiente probabilidad de que una persona fumadora de 50 años alcance los 60 es de $e^{-2/3} \approx 0.5134$.

5. Características de una Variable Aleatoria

1. ((Canavos 1984) Ej. 3.10) Considere la *v. a.* X que denota las desviaciones sobre el peso neto en un proceso de llenado con cierta máquina y sea su función de densidad de probabilidad (*f. d. p.*) dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{10}\mathbb{1}_{(0,10)}(x)$$

Determine:

a) $\mathbb{E}[X] = \mu_X$ y $\operatorname{var}(X) = \sigma_X^2$.

b) Los coeficientes de asimetría y curtosis dados respectivamente por

$$\nu_3(X) = \frac{\mathbb{E}[(X-\mu_X)^3]}{[\mathbb{E}[(X-\mu_X)^2]^{3/2}}, \qquad \nu_4(X) = \frac{\mathbb{E}[(X-\mu_X)^4]}{[\mathbb{E}[(X-\mu_X)^2]^2}$$

2. ((Canavos 1984) Ej. 3.11) Suponga que la duración aleatoria T en minutos de una conversación de negocios por teléfono sigue una *f. d. p.* dada por

$$f(t) = \frac{1}{4}e^{-t/4}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$$

Determine:

a) La función generadora de momentos (*f. g. m.*) $M_T(w) = \mathbb{E}[e^{wT}]$.

b) $\mathbb{E}[T]$ y $\mathrm{var}(T)$.

c) Los coeficientes de asimetría $\nu_3(T)$ y curtosis $\nu_4(T)$.

d) Comparado con el ejercicio anterior, ¿qué distribución tiene menor dispersión relativa?

3. ((Hogg and Craig 1978) Ej. 1.97) Sea X *v. a.* con tercer momento finito. Grafique las siguientes funciones de densidad y muestre que están respectivamente: sesgada a la izquierda, no sesgada y sesgada a la derecha, y con su coeficiente de asimetría ν_3 negativo, cero y positivo.

   a) $f(x) = (1+x)/2 \; \mathbb{1}_{(-1,1)}(x)$.

   b) $f(x) = 1/2 \; \mathbb{1}_{(-1,1)}(x)$.

   c) $f(x) = (1-x)/2 \; \mathbb{1}_{(-1,1)}(x)$.

4. ((Hogg and Craig 1978) Ej. 1.98) Grafique las siguientes funciones de densidad y muestre que la primera tiene un coeficiente de curtosis menor que la segunda.

   a) $f(x) = 1/2 \; \mathbb{1}_{(-1,1)}(x)$.

   b) $f(x) = 3(1-x^2)/4 \; \mathbb{1}_{(-1,1)}(x)$.

5. ((Canavos 1984) Ej. 3.12) La calificación promedio en una prueba de Estadística es de 62.5 con una desviación estándar de 10. El profesor considera que el examen ha sido demasiado largo y/o difícil. En consecuencia él desea *ajustar las calificaciones* X de manera que el promedio sea ahora de 70 con una desviación estándar de 8 puntos. ¿Qué ajuste del tipo $a + bX$ debería utilizar?

6. ((Canavos 1984) Ej. 3.13) Sea X una *v. a.* con media μ y varianza σ^2.

   a) Evalúe $\mathbb{E}[(X-c)^2]$ en términos de μ y σ^2, donde c es una constante.

   b) ¿Para qué valores de c es mínimo $\mathbb{E}[(X-c)^2]$?

7. ((Canavos 1984) Ej. 3.14) Con referencia al problema 2, muestre que la *v. a.* $Y = (T-4)/4$, tiene media cero, varianza 1, pero los mismos coeficientes de asimetría y curtosis que la *v. a.* T.

8. ((Canavos 1984) Ej. 3.17) Suponga que el ingreso semanal Y (en miles de pesos) de un consultor es aleatorio con *f. d. p.* dada por

$$f(y) = \frac{1}{10}\, e^{-y/10} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

   a) Determine la media y la mediana del ingreso.

   b) Determine la desviación estándar y el rango intercuartílico.

   c) Determine el 90-percentil de la distribución.

   d) ¿Cuál es la probabilidad de que el ingreso de una semana exceda el valor medio más una desviación estándar? Esto es, determine $\mathbb{P}(Y > \mu_Y + \sigma_Y)$.

9. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 3.158) Sea Y *v. a.* con *f. g. m.* dada por $M_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}]$ y sea $W = a + bY$, con a y b constantes. Muestre que la *f. g. m.* de W está dada por $M_W(t) = e^{at} M_Y(bt)$, $t \in \mathbf{R}$.

10. ((Hogg and Craig 1978) Sec 1.10, Ej. 3) Dado que la serie $\{\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots\}$ converge a $\pi^2/6$, entonces,
$$f(x) = \frac{6}{\pi^2 x^2}\mathbb{1}_{\{1,2,\dots\}}(x)$$
es la *f. m. p.* de una *v. a.* entera positiva X. Muestre que no existe la correspondiente *f. g. m.* $M_X(t)$ pues no hay algún $\delta > 0$ tal que $M_X(t)$ exista para todo $-\delta < t < \delta$.

11. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 3.159) Use el resultado del problema 1 para mostrar que si $W = a + bY$, entonces, $\mathbb{E}[W] = a + b\mathbb{E}[Y]$ y $\text{var}(W) = b^2\text{var}(Y)$.

12. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 3.160) Sea X una *v. a.* que representa en número de éxitos en n ensayos Bernoulli con probabilidad de éxito $0 < p < 1$. Sea $Y = n - X$.

    a) Muestre que X sigue la **distribución binomial**. Esto es, su *f. m. p.* está dada por:
    $$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}\mathbb{1}_{\{0,1,\dots,n\}}(x)$$
    donde $q = 1 - p$.

    b) Encuentre la *f. g. m.* $M_X(t)$.

    c) Muestre que $\mathbb{E}[Y] = nq$ y $\text{var}(Y) = npq$.

    d) Muestre que $M_Y(t) = (p + qe^t)^n$.

    e) Con base al inciso anterior, ¿cuál diría que es la distribución de la *v. a.* Y?

    f) ¿Qué representa Y?

    g) Con base en el inciso anterior, ¿por qué resultan las respuestas del *b*)–*d*) "obvias"?

13. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 4.141) Considere $a < b$. Muestre que la *f. g. m.* de la *v. a.* U distribuida uniformemente en el intervalo (a, b), es
$$M_U(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}, \quad |t| < \infty$$

14. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 4.142) Considere Y distribuida uniformemente en $(0, 1)$.

    a) Encuentre su *f. g. m.* M_Y.

    b) Sean a y b constantes, y $V = a + bY$. ¿Cuál es la distribución de V? Justifique su respuesta.

15. ((Hogg and Craig 1978) Ej. 1.100) Sea X *v. a.* con *f. g. m.* $M_X(t)$, y defina $\psi_X(t) = \ln M_X(t)$. Muestre que
$$\psi'_X(0) = \mu_X, \qquad \psi''_X(0) = \sigma^2_X$$

16. ((Hogg and Craig 1978) Ej. 1.103) Sea $b > 0$ y X *v. a.* continua con soporte en el intervalo $(0, b)$. Muestre que
$$\mathbb{E}[X] = \int_0^b [1 - F_X(u)]du$$

17. Sea Z distribuida normal estándar. Verifique que $\mathbb{E}[Z^3] = 0$ y $\mathbb{E}[Z^4] = 3$.

18. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ejem. 8.7) Suponga que $X \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$. Use la *f. g. m.* de X para mostrar que los momentos impares de X son cero y los pares están dados por
$$\mu_X^{(2n)} = \frac{(2n)!\sigma^{2n}}{2^n(n!)}$$

19. En el juego de ruleta europea hay un total de 37 números (0 al 36); el 0 es de *color verde*, los 18 números impares son de *color rojo* y los 18 números pares son de *color negro*.

    Un jugador decide lanzar un dado honesto de 6 caras para determinar cuánto dinero apostar y a qué números. En caso de ganar el jugador recibirá el doble de lo que haya apostado.

    El jugador adopta la siguiente estrategia antes de lanzar el dado:

    - Si el resultado es mayor a 2, el jugador apostará 10 euros a los números pares de la ruleta.
    - Si el resultado es menor a 2, el jugador apostará 15 euros a los números impares de la ruleta.
    - Si el resultado es igual a 2, el jugador apostará 5 euros al número 0.

    Con base en la estrategia anterior responda los siguientes incisos:

    a) ¿Cuá el la ganancia esperada del jugador?

    b) ¿Cuánto dinero espera el jugador apostar?

    c) Si el jugador adopta la misma estrategia durante cinco días consecutivos, ¿cuál es la probabilidad de que gane en dos de éstos? Mencione los supuestos necesarios para responder esta pregunta.

6. Función Generadora de Momentos

1. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 3.158) Sea Y *v. a.* con *f. g. m.* dada por $M_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}]$ y sea $W = a + bY$, con a y b constantes. Muestre que la *f. g. m.* de W está dada por $M_W(t) = e^{at}M_Y(bt)$, $t \in \mathbf{R}$.

2. ((Hogg and Craig 1978) Sec 1.10, Ej. 3) Dado que la serie $\{\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots\}$ converge a $\pi^2/6$, entonces,
$$f(x) = \frac{6}{\pi^2 x^2}\mathbb{1}_{\{1,2,\dots\}}(x)$$
es la *f. m. p.* de una *v. a.* entera positiva X. Muestre que no existe la correspondiente *f. g. m.* $M_X(t)$ pues no hay algún $\delta > 0$ tal que $M_X(t)$ exista para todo $-\delta < t < \delta$.

3. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 3.159) Use el resultado del problema 1 para mostrar que si $W = a + bY$, entonces, $\mathbb{E}[W] = a + b\mathbb{E}[Y]$ y $\mathrm{var}(W) = b^2\mathrm{var}(Y)$.

4. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 3.160) Sea X una *v. a.* que representa en número de éxitos en n ensayos Bernoulli con probabilidad de éxito $0 < p < 1$. Sea $Y = n - X$.

    a) Muestre que X sigue la **distribución binomial**. Esto es, su *f. m. p.* está dada por:
$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}\mathbb{1}_{\{0,1,\dots,n\}}(x)$$
    donde $q = 1 - p$.

b) Encuentre la *f. g. m.* $M_X(t)$.

c) Muestre que $\mathbb{E}[Y] = nq$ y $\text{var}(Y) = npq$.

d) Muestre que $M_Y(t) = (p + qe^t)^n$.

e) Con base al inciso anterior, ¿cuál diría que es la distribución de la *v. a.* Y?

f) ¿Qué representa Y?

g) Con base en el inciso anterior, ¿por qué resultan las respuestas del *b*)–*d*) "obvias"?

5. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 4.141) Considere $a < b$. Muestre que la *f. g. m.* de la *v. a.* U distribuida uniformemente en el intervalo (a, b), es

$$M_U(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}, \quad |t| < \infty$$

6. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 4.142) Considere Y distribuida uniformemente en $(0, 1)$.

   a) Encuentre su *f. g. m.* M_Y.

   b) Sean a y b constantes, y $V = a + bY$. ¿Cuál es la distribución de V? Justifique su respuesta.

7. ((Hogg and Craig 1978) Ej. 1.100) Sea X *v. a.* con *f. g. m.* $M_X(t)$, y defina $\psi_X(t) = \ln M_X(t)$. Muestre que

$$\psi'_X(0) = \mu_X, \qquad \psi''_X(0) = \sigma_X^2$$

8. ((Hogg and Craig 1978) Ej. 1.103) Sea $b > 0$ y X *v. a.* continua con soporte en el intervalo $(0, b)$. Muestre que

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^b [1 - F_X(u)]du$$

9. Sea Z distribuida normal estándar. Verifique que $\mathbb{E}[Z^3] = 0$ y $\mathbb{E}[Z^4] = 3$.

10. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ejem. 8.7) Suponga que $X \sim \text{N}(0, \sigma^2)$. Use la *f. g. m.* de X para mostrar que los momentos impares de X son cero y los pares están dados por

$$\mu_X^{(2n)} = \frac{(2n)!\sigma^{2n}}{2^n(n!)}$$

11. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 4.141) Considere $a < b$. Muestre que la *f. g. m.* de la *v. a.* U distribuida uniformemente en el intervalo (a, b), es

$$M_U(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}, \quad |t| < \infty$$

    Calcule $\mathbb{E}[u]$ a partir de la función anterior.

12. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 4.142) Considere Y distribuida uniformemente en $(0, 1)$.

    a) Encuentre su *f. g. m.* M_Y.

    b) Sean a y b constantes, y $V = a + bY$. ¿Cuál es la distribución de V? Justifique su respuesta.

13. ((Hogg and Craig 1978) Ej. 1.100) Sea X *v. a.* con *f. g. m.* $M_X(t)$, y defina $\psi_X(t) = \ln M_X(t)$. Muestre que

$$\psi'_X(0) = \mu_X, \qquad \psi''_X(0) = \sigma_X^2$$

14. Sea Z distribuida normal estándar. Verifique que $\mathbb{E}[Z^3] = 0$ y $\mathbb{E}[Z^4] = 3$.

15. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ejem. 8.7) Suponga que $X \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$. Use la *f. g. m.* de X para mostrar que los momentos impares de X son cero y los pares están dados por
$$\mu_X^{(2n)} = \frac{(2n)!\sigma^{2n}}{2^n(n!)}$$

16. Suponga X variable aleatoria (*v. a.*) con todos sus momentos finitos dados por $\mu_X^{(k)} = k!,\ k \in \mathbb{N}$. Si X tiene función generadora de momentos. Encuentre la distribución de X.

17. (Mood et al. (1974), Ej. 4.18) Considere la *v. a.* con *f. d. p.* $f(x) = x^{-2}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$.
    a) Muestre que f es una densidad propia.
    b) Muestre que X no tiene función generadora de momentos $m(t)$ para $t > 0$.

18. Sea X *v. a.* con función característica (*f. c.*) dada por $\varphi(t) = e^{i\alpha t - \beta t^2}$, $t \in \mathbb{R}$ $(-\infty < \alpha < \infty,\ \beta > 0)$ y donde $i = \sqrt{-1}$. Identifique la *ley de probabilidades* de X y calcule $E[X^3]$.

19. ((Harris 1966) Ej. 4-4.5) Sea W *v. a.* que sigue la distribución Cauchy $(0, 1)$. Esto es, con *f. d. p.* dada por
$$f_W(w) = \frac{1}{\pi(1+w^2)}, \qquad -\infty < w < \infty$$
Muestre que W tiene *f. g. m.* salvo $m_W(t)$ para $t = 0$. Sin embargo, sí tiene la función característica $\varphi_W(t) = e^{-|t|}$, para $t \in \mathbb{R}$.

20. ((Harris 1966) Appendix 3*) Sea X *v. a.* con *f. p. a.* $F(x)$ y *f. c.* $\varphi(t)$. Entonces, $\varphi(t)$ es real si y solo si F es simétrica, en el sentido que $F(-x) = 1 - F(x)$, para todo x.

7. Desigualdades de Probabilidad

Regla empírica. (Ref: (Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) pag. 10-11.) Para una distribución de mediciones (con media μ y desviación estándar σ) que sigue aproximadamente una distribución normal, se tiene la siguiente cobertura:

- $\mu \pm \sigma$ contiene aproximadamente el 68 % de las mediciones.
- $\mu \pm 2\sigma$ contiene aproximadamente el 95 % de las mediciones.
- $\mu \pm 3\sigma$ contiene aproximadamente el 99.7 % de las mediciones.

1. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 3.167) Sea Y una *v. a.* con media 11 y varianza 9. Utilice la desigualdad de Chebyshev para encontrar:
    a) Una cota inferior para $\mathbb{P}(6 < Y < 16)$.
    b) El valor de c para el cual $\mathbb{P}(|Y - 11| \geq c) \leq 0.09$.

2. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 3.169) *La desigualdad de Chebyshev no puede mejorarse.*

    Sea Y una variable aleatoria tal que

y	-1	0	$+1$
$\mathbb{P}(Y = y)$	$1/18$	$16/18$	$1/18$

a) Muestre que $\mu = \mathbb{E}[Y] = 0$ y $\sigma^2 = \text{var}(Y) = 1/9$.

b) Use la distribución de probabilidad para calcular $\mathbb{P}(|Y - \mu| \geq 3\sigma)$. Compare el resultado con el provisto por la desigualdad de Chebyshev y verifique que la cota se alcanza para $k = 3$.

c) En el inciso anterior se garantiza que $\mathbb{E}[Y] = 0$ basando la distribución en los valores $-1, 0, +1$ y haciendo que $\mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}(Y = +1)$. La varianza fue controlada por las probabilidades asignadas a $\mathbb{P}(Y = -1)$ y $\mathbb{P}(Y = 1)$. Usando la misma idea, construya una distribución de probabilidades para la *v. a.* X y tal que $\mathbb{P}(|X - \mu_X| \geq 2\sigma_X) = 1/4$.

d) Si se especifica cualquier k, ¿cómo se puede construir una *v. a.* W tal que $\mathbb{P}(|W - \mu_W| \geq k\sigma_W) = 1/k^2$?

3. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 3.173) Una moneda balanceada es lanzada tres veces. Sea Y el número observado de águilas.

   a) Calcule la probabilidad de que Y tome los valores de $0, 1, 2$ y 3.

   b) Encuentre la media y desviación estándar de Y.

   c) Empleando la distribución encontrada en el primer inciso, encuentre la fracción de la población teórica que se encuentra a más de una desviación estándar de la media. Repita los cálculos para 2 desviaciones estándar. ¿Cómo se comparan los resultados con los obtenidos empleando la desigualdad de Chebyshev? ¿Cómo comparando con la distribución normal (**regla empírica**)?

4. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 4.147) Una máquina empleada para llenar cajas de cereales dispensa en promedio, μ onzas por caja. El empresario desea que la cantidad real dispensada Y no esté más allá de μ por una onza al menos 75 % del tiempo. ¿Cuál es el valor más grande de σ_Y que puede ser tolerado para satisfacer lo pedido por el empresario?

5. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 4.148) Sea Y una *v. a.* con *f. d. p.* dada por

$$f(y) = c(2 - y)\mathbb{1}_{[0,2]}(y)$$

   Encuentre $\mathbb{P}(|Y - \mu| \leq 2\sigma)$ y compare la probabilidad con la que le ofrece la desigualdad de Chebyshev y la regla empírica.

6. ((Parzen 1960) Sec. 8.6) Sea X *v. a.* con segundo momentos finito. Se define la **razón señal-ruido** de X (SNR(X)) por

$$\text{SNR}(X) = \frac{|\mu_X|}{\sigma_X}$$

   Muestre que si $\text{SNR}(X) \geq 44.7$, se tiene entonces que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X - \mu_X}{\mu_X}\right| \leq 0.10\right) \geq 0.95$$

   (Sugerencia: utilice la desigualdad de Chebyshev.)

7. ((Wackerly, Mendenhall III, and Scheaffer 2008) Ej. 4.149) Encuentre $\mathbb{P}(|U - \mu| \leq k\sigma)$ donde U se distribuye uniforme en el intervalo $(0, 1)$, y compare la probabilidad con la que le ofrece la desigualdad de Chebyshev, para $k = 1, 2,$ y 3.

8. ((Ross 2010) Ej. 8.20) Sea X una *v. a.* no negativa con media 25. ¿Qué puede decir de los siguientes valores esperados?

$$i)\ \mathbb{E}[X^3]; \quad ii)\ \mathbb{E}[\sqrt{X}]; \quad iii)\ \mathbb{E}[\log X]; \quad iv)\ \mathbb{E}[e^{-X}]$$

9. ((Ross 2010) Ej. 8.21) Sea X una *v. a.* no negativa. Muestre que

$$\mathbb{E}[X] \leq (\mathbb{E}[X^2])^{1/2} \leq (\mathbb{E}[X^3])^{1/3} \leq \cdots$$

10. **Desigualdades entre medias**.

- **Media aritmética**: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$
- **Media geométrica**: $\exp\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log x_i\right\} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$
- **Media armónica**: $\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right]^{-1} = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n números positivos. Muestre que siempre se cumple que

$$\text{mín}\{x_1, \ldots, x_n\} \leq \frac{1}{\frac{1}{n}(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n})} \leq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \leq \text{máx}\{x_1, \ldots, x_n\}$$

donde las desigualdades serán igualdades solamente si $x_1 = \cdots = x_n$. (*Sugerencia*: asigne la distribución uniforme a los valores x_i's y utilice la desigualdad de Jensen con la función cóncava logaritmo para mostrar la desigualdad entre las medias aritmética y la geométrica.)

11. Sea N_t en número de partículas emitidas en $[0, t]$. Suponga que $N_t \sim \text{Po}(\lambda t)$ para algún $\lambda > 0$. Para $\lambda = 1.7$, $t = 10$ microsegundos y $\epsilon = 1$, determine $\mathbb{P}(|N_t/t - \lambda| \geq \epsilon)$,

a) utilizando la desigualdad de Chebyshev.

b) utilizando la distribución exacta.

8. Distribuciones paramétricas discretas

1. Sea X *v. a.* entera positiva tal que $\mathbb{P}(X = k) = p_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Muestre que

$$p_{k+1} = \frac{\lambda}{k+1} p_k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

si y solo si X sigue una distribución Poisson parámetro λ. (*Sugerencia*: muestre que $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} p_0$ y use el hecho que $\sum p_i = 1$.)

2. **Aproximación de la distribución binomial por la distribución Poisson.** Considere $X \sim \text{Bin}(n, p)$ y $Y \sim \text{Po}(\lambda)$. Verifique algunas entradas de la tabla siguiente donde se ha aproximado la distribución binomial por la Poisson considerando $\lambda = np$.

	$n = 10, p = 0.50$ $\lambda = 5.0$		$n = 20, p = 0.25$ $\lambda = 5.0$		$n = 30, p = 0.25$ $\lambda = 7.5$		$n = 30, p = 0.167$ $\lambda = 5.0$		$n = 30, p = 0.125$ $\lambda = 3.6$		$n = 50, p = 0.10$ $\lambda = 5.0$	
w	$F_X(w)$	$F_Y(w)$	$F_X(w)$	$F_Y(w)$	$F_X(w)$	$F_Y(w)$	$F_X(w)$	$F_Y(w)$	$F_X(w)$	$F_Y(w)$	$F_X(w)$	$F_Y(w)$
1	0.0107	0.0404	0.0243	0.0404	0.0020	0.0047	0.0295	0.0404	0.0962	0.1117	0.7358	0.7358
3	0.1719	0.2650	0.2252	0.2650	0.0374	0.0591	0.2396	0.2650	0.4734	0.4838	0.9822	0.9810
5	0.6230	0.6160	0.6172	0.6160	0.2026	0.2414	0.6164	0.6160	0.8356	0.8229	0.9995	0.9994
8	0.9893	0.9319	0.9591	0.9319	0.6736	0.6620	0.9494	0.9319	0.9910	0.9852	1.0000	1.0000
12	1.0000	0.9980	0.9998	0.9980	0.9784	0.9573	0.9995	0.9980	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000
15	1.0000	0.9999	1.0000	0.9999	0.9992	0.9954	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

3. ((Ross 2006) Ej. 4.57) Suponga que el número de accidentes que suceden en un carretera cada día se distribuye Poisson con parámetro $\lambda = 3$.

a) Calcule la probabilidad que 3 o más accidentes ocurran hoy.

b) Repita el inciso sabiendo que al menos un accidente ocurre hoy.

4. ((Ross 2006) Ej. 4.58) Compare la aproximación Poisson con la correcta probabilidad binomial para los siguientes casos:

   a) $\mathbb{P}(X = 2)$ cuando $n = 8$ y $p = .1$
   b) $\mathbb{P}(X = 9)$ cuando $n = 10$ y $p = .95$
   c) $\mathbb{P}(X = 0)$ cuando $n = 10$ y $p = .1$
   d) $\mathbb{P}(X = 4)$ cuando $n = 9$ y $p = .2$

5. ((Ross 2006) Ej. 4.83) Suponga que existen 3 carreteras en una ciudad. El número de accidentes diario que ocurren en estas carreteras se distribuyen Poisson con parámetros $.3, .5$ y $.7$ respectivamente. Encontrar el número esperado de accidentes en cualquiera de las carreteras.

6. ((Ross 2006) Theo. Ej. 4.9) Muestre que la derivación de la probabilidad binomial

$$\mathbb{P}(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

   para $i = 0, 1, \ldots, n$ te lleva a la demostración de teorema del binomio

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

   cuando x y y son no negativas. Sugerencia: tome $p = (\frac{x}{x+y})$.

7. ((Ross 2006) Self Test 4.8) Sea X que representa una variable aleatoria binomial con parámetros n y p. Demuestre que

$$\mathbb{P}\{X \leq i\} = 1 - \mathbb{P}\{Y \leq n - i - 1\}$$

   donde $Y \sim B(n, 1-p)$. ¿A qué argumento sobre el número de fracasos es equivalente el número de éxitos menores o iguales que i?

8. ((Ross 2006) Self Test 4.9) Si X es una variable aleatoria binomial con $\mathbb{E}[X] = 6$ y $\mathrm{var}(X) = 2.4$. Encontrar $\mathbb{P}(X = 5)$.

9. ((Ross 2006) Self Test 4.21) Suponga que $\mathbb{P}(X = a) = p$ y que $\mathbb{P}(X = b) = 1 - p$.

   a) Muestre que $\frac{X-b}{a-b}$ es una variable aleatoria Bernoulli.
   b) Calcule la $\mathrm{var}(X)$.

10. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 3.2) Considere la *f. m. p.* de X distribuida **binomial negativa** dada por:

$$f(x) = p^{\alpha} \binom{-\alpha}{x} (-1)^x (1-p)^x I_{\{0,1,2,\ldots\}}(x)$$

    con $\alpha = r$. Calcule la correspondiente *f. m. p.* de $Y = X + r$.

11. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 3.6) Suponga que X tiene una distribución geométrica con soporte $\{0, 1, \ldots\}$ y $p = 0.8$. Calcule las probabilidades de los siguientes eventos:

    a) $X > 3$.
    b) $4 \leq X \leq 7$ ó $X > 9$.
    c) $3 \leq X \leq 5$ ó $7 \leq X \leq 10$.

12. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 3.10) Sea X una variable aleatoria distribuida geométricamente con soporte $\{0, 1, \ldots\}$ y parámetro p. Sea $Y = X$ si $X < M$ y sea $Y = M$ si $X \geq M$; esto es, $Y = \min(X, M)$. Calcule la *f. m. p.* de Y.

13. Sea X distribuida binomial parámetros $n = 2$ y p. Calcule la *f. m. p.* de la variable aleatoria $Y = (X - 1)^2$.

14. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 3.11) Sea X distribuida geométricamente con soporte $\{0, 1, \dots\}$ y parámetro p. Calcule la *f. m. p.* de las siguientes variables aleatorias:

    a) $U = X^2$.

    b) $V = X + 3$.

15. Una exhibición de arte en Nueva York recibe en promedio 5 personas por hora.

    a) Determine la probabilidad de que en media hora se reciban 4 o menos visitantes.

    b) Determine la probabilidad de entre 11 y 12 del día se reciban al menos 12 visitantes.

    c) Si el ingreso de la galería devengado de las visitas por día (contemplando 7 horas de operación diaria), W está dado por $W = -100 + N + 2N^2$, donde N es el número de visitantes recibidos por día. Encuentre el Ingreso esperado por día en la galería.

    d) Si se consideran 5 días en una semana, determine la probabilidad de que en al menos 4 días hayan más de 7 personas entre las 11:00 y las 12:00 hrs.

9. Distribuciones continuas

1. Sea Y una *v. a.* que sigue la distribución uniforme en el intervalo (a, b). Entonces,

    a) Calcule la probabilidad de que Y esté a menos de una desviación estándar de su media.

    b) Determine la probabilidad de que Y esté a más de dos desviaciones estándar de su media.

    c) Determine la mediana, primer y tercer cuantil de la distribución.

2. ((Ross 2006) Ej. 5.13) Una persona llega a la parada del camión a las 10 en punto sabiendo que el camión va a llegar en algún tiempo uniformemente distribuido entre las 10:00 y las 10:30.

    a) Cuál es la probabilidad de que esa persona tenga que esperar más de 10 minutos?

    b) Si a las 10:15 el camión no ha llegado, ¿cuál es la probabilidad de que esa persona tenga que esperar por lo menos otros 10 minutos más?

3. ((Ross 2006) Ej. 5.18) Suponga que X es una variable aleatoria distribuida normal con media 5. Si $\mathbb{P}(X > 9) = .2$ aproximadamente, cuál es la varianza de X?

4. ((Ross 2006) Ej. 5.32) El tiempo (medido en horas) que se necesita para componer una máquina se distribuye exponencialmente con parámetro $\lambda = 1/2$. Determine:

    a) la probabilidad de que la reparación tarde más de 2 horas.

    b) la probabilidad condicional de que la reparación tarde al menos 10 horas dado que se sabe que excede las 9 horas.

5. ((Ross 2006) Ej. 5.33) En número de años que un radio funciona se distribuye exponencialmente con un valor medio de 8 años. Si Juan compra un radio usado, ¿cuál es la probabilidad de que el radio siga funcionando después de 8 años?

6. ((Ross 2006) Self Test 5.9) Suponga que el tiempo que utiliza para viajar de su casa a su oficina está distribuido normal con media 40 y desviación estándar de 7 minutos. Si usted desea estar 95 por ciento seguro de que no llegará tarde a una cita a la 1 P.M., ¿cuál es la hora más tarde a la que usted debería salir de su casa?

7. ((Ross 2006) Self Test 5.16) Muestre que si X es una variable aleatoria distribuida Cauchy entonces $1/X$ también se distribuye Cauchy.

8. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 5.20) Sea X distribuida uniformemente en el intervalo $(0, 1)$. Encuentre la *f. d. p.* de $Y = X^{1/\beta}$, donde $\beta \neq 0$.

9. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 5.37) Sea t_p un número tal que $\Phi(t_p) = p, 0 < p < 1$, donde Φ denota la fución de probabilidad acumulada de la distribución normal estándar. Sea $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Muestre que, para $0 < p_1 < p_2 < 1$,

$$\mathbb{P}(\mu + t_{p_1}\sigma \leq X \leq \mu + t_{p_2}\sigma) = p_2 - p_1$$

10. ((Hoel, Port, and Stone 1971) Ej. 5.39) Sea X una *v. a.* distribuida exponencialmente con media $1/\lambda$. Sea Y la *v. a.* definida en términos de X como $Y = m$ si $m \leq X < m+1$, donde m es un entero no negativo. ¿Cómo se distribuye Y? Esto es, determine la *f. m. p.* f_Y.

11. ((Ross 2006) Ej. 5.16) La precipitación pluvial anual medida en pulgadas de una región específica sigue aproximadamente una distribución $\mathrm{N}(\mu = 40, \sigma^2 = 16)$. ¿Cuál es la probabilidad de que, comenzando este año, tengan que pasar más de 10 años para que ocurra una precipitación pluvial anual de más de 50 pulgadas? ¿Qué supuestos tiene que hacer?

12. ((Ross 2006) Theo Ej. 5.13) La **mediana** de una *v. a.* continua que tiene una función de distribución F es aquel valor m tal que $F(m) = 1/2$. Esto es, una *v. a.* puede ser mayor o menor a su mediana con igual probabilidad. Encuentre la mediana de X, donde:

    a) $X \sim \mathrm{unif}(a, b)$.
    b) $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.
    c) $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

13. ((Ross 2006) Theo. Ej. 5.14) La **moda** de una *v. a.* continua que tiene función de densidad f es el valor x para el cual $f(x)$ alcanza su máximo. Calcule la moda de X en los casos del ejercicio anterior.

Referencias

Bartle, R. G. (1966). *The Elements of Integration and Lebesgue Measur*. New York, NY: John Wiley & Sons.

Canavos, G. C. (1984). *Applied Probability and Statistical Methods*. Boston: Little, Brown and Company.

Devore, J. L. (1995). *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences* (4th ed.). Pacific Grove: Duxubury.

Harris, B. (1966). *Theory of Probability*. Reading, MA.: Addison-Wedsley.

Hoel, P. G., S. C. Port, and C. J. Stone (1971). *Introduction to Probability Theory*. Boston: Houghton Miffling Company.

Hogg, R. V. and A. T. Craig (1978). *Introduction to Mathematical Statistics* (4 ed.). New York: Macmillan Publishing Co., Inc.

Mood, A. M., F. A. Graybill, and D. C. Boes (1974). *Introduction to the Theory of Statistics* (3rd ed.). Singapore: McGraw-Hill.

Parzen, E. (1960). *Modern Probability Theory and Its Applications*. New York: John Wiley & Sons.

Ross, S. (2006). *A First Course in Probability* (7th ed.). Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.

Ross, S. (2010). *A First Course in Probability* (8th ed.). Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.

Wackerly, D. D., W. Mendenhall III, and R. L. Scheaffer (2008). *Mathematical Statistics with Applications* (7 ed.). Australia: Thomson.

Walpole, R. E., R. H. Myers, L. Myers, S, and K. Ye (2007). *Probability & Statistics for Engineers and Scientists* (8th ed.). Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall.

Respuestas

1. Espacios de Probabilidad

1:1. —

1:2. $\mathbb{P}(\{\text{par}\}) = \frac{18}{37}$

1:3. $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{10}$

1:4. $\mathbb{P}(B) = \frac{5}{12}$

1:5. $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{5}{8}$ $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{8}$

1:6. $\mathbb{P}(A) = \frac{72}{90}$

1:7. Si se sabe que ocurrió el evento A, el espacio muestral se restringe y $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$

1:8. $\{(6), (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (1, 1, 6), \ldots\}$
$(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^c$ es el evento en que el 6 no cae.

1:9. $A = \{1, 0001, 0000001, \ldots\}$ $B = \{01, 00001, 00000001, \ldots\}$ $C = \{001, 000001, 000000001, \ldots\}$

1:10. *a*) 2^5

b)

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

c) 2^3

1:11. *a*) $\mathbb{P}(A \cup C) = 0.4$

b) $\mathbb{P}(A \cap C) = 0.1$

1:12. *a*) 80

b) 120, 60, 10

c) 190, 70, 10

d) 200, 260, 270

1:13. *a*) 49/100

b) 35/100

c) $1 - 49/100 \cdot 48/99$

1:14. *a*) 15/36

b) 4/10

1:15. 0.216718

1:16. *a*) $\mathbb{P}(E_k) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n-k+1}{n-k+2} \cdot \frac{1}{n-k+1}$

b) $\mathbb{P}(E_k) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1}$

1:17. —

1:18. Se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &\leq 1 \\ -\mathbb{P}(A \cup B) &\geq -1 \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \\ &\geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \end{aligned}$$

1:19. Considere el espacio muestral $\Omega = \{w_1, w_2, \dots\}$ y suponga que $P(\{w_n\}) = p_n = \delta$, para todo $n \geq 1$. Entonces,

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{w_n\}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta = \delta \lim_{n\to\infty} n$$

Luego, si $\delta > 0$ se sigue una contradicción, de la misma forma si $\delta = 0$. Por lo tanto, $P(\{w_n\}) = p_n$ no puede ser constante.

Por otro lado, considere $p_n = 2^{-n}$, para $n \geq 1$. En ese caso, se satisface que

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{w_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$$

1:20. —

1:21. Si $\mathbb{P}(A_n) = 1$, para toda n y $\mathbb{P}(A_n^c) = 0$.De la desigualdad de Boole se sigue que

$$0 \leq \mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n^c) \leq \sum \mathbb{P}(A_n^c) = \sum 0 = 0$$

Pero, por De Morgan, $(\cup A_n^c)^c = \cap (A_n^c)^c = \cap A_n$. Luego,

$$\mathbb{P}(\cap A_n) = 1 - \mathbb{P}((\cap A_n)^c) = 1 - \mathbb{P}(\cup A_n^c) = 1$$

1:22. —

1:23. —

1:24. —

2. Técnicas de Conteo

2:1. *a*) $26^2 \cdot 10^5$

b) $(26)_2 \cdot (10)_5$

2:2. *a*) $8 \cdot 7 \cdots 1 = 8!$

b) $2 \cdot 7!$

c) $2 \cdot 4! \cdot 4!$

d) $4 \cdot 5! \cdot 3!$

e) $4! \cdot 2^4$

f) $8! - 2(7!)$

2:3. $\binom{10}{5}\binom{12}{5}5!$

2:4. *a*) 36

b) 26

2:5. Sea $p = \binom{52}{5}^{-1}$

a) $\binom{4}{1}p$

b) $\binom{4}{1}10p$

c) $\binom{13}{1}48p$

d) $\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{1}\binom{4}{2}p$

e) $\binom{4}{1}\binom{13}{5}p$

f) $10 \cdot 4^5 p$

g) $\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{2}4^2 p$

h) $\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2\binom{11}{1}\binom{4}{1}p$

i) $\binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{3}4^3 p$.

2:6. *a*) $\binom{4+3}{4}$

b) $\binom{4}{2}\binom{3}{2}$

2:7. $2(9-2)8!$

2:8. *a*) Sin reemplazo: $p = \frac{(r-k)_n}{(r)_n}$

b) Con reemplazo: $p = \left(1 - \frac{k}{r}\right)^n$

2:9. Sea $\{A_j\} j$ 1's exactamente. Luego, $n(A_j) = \binom{n}{j}$. Entonces,

$$n\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k\right\} = n\,\{\text{al menos } k \text{ 1's}\} = n\left\{\bigcup_{j=k}^{n} A_j\right\} = \sum_{j=k}^{n} n(A_j) = \sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}$$

2:10. —

2:11. —

2:12. $p = \binom{3}{2}\frac{2^n-2}{3^n}$

2:13. $p = 0.1192$

3. Probabilidad condicional

3:1. a) $\mathbb{P}(A|B) = 0.3333$.

b) $\mathbb{P}(B|A) = 0.2$.

c) $\mathbb{P}(A|A \cup B) = 0.7142$.

d) $\mathbb{P}(A|A \cap B) = 1$.

e) $\mathbb{P}(A \cap B|A \cup B) = 0.1428$.

3:2. Sea $\mathbb{P}\left(\{\text{Al menos uno de ellos cae } 6\}\right) = 0.333$.

3:3. $\mathbb{P}(C \cup D) = 0.8438$

3:4. $\mathbb{P}(\text{artículo defectuoso}) = 0.0245$

3:5. Es más probable que dado que salió uno defectuoso haya sido producido con el plan 3.

3:6. a) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0.54$.

b) $\mathbb{P}(B \cap C) = 0.68$.

c) $\mathbb{P}(C) = 0.74$.

d) $\mathbb{P}(A|B \cap C) = 0.7941$.

3:7. Sea $\{A\}$el sistema funciona.

a) $\mathbb{P}(A) = 0.9981$.

b) $\mathbb{P}(A) = 0.8588$.

3:8. $\mathbb{P}((a, a)|(A, a)) = \dfrac{2p}{(1+p)}$.

3:9. a) $\mathbb{P}\left(\{\text{Ninguna haya sido utilizada anteriormente}\}\right) \approx 0.0893$.

b) $\mathbb{P}\left(\{\text{Dos de las tres pelotas ya fueron utilizadas anteriormente}\}\right) \approx 0.4091$.

3:10. $p = 1/4$.

3:11. Sean los eventos $D_i = \{\text{Se descomponen } i \text{ motores}\}$ y $T = \{\text{La maquina sigue trabajando}\}$. Entonces $\mathbb{P}(D_3^C|T) = 0.6536$.

3:12. Considere los eventos $D_i = \{\text{Dió la vuelta en el } i\text{-ésimo intento}\}$

a) $\mathbb{P}(D_3) = 0.5(p_1^2 - p_2^2) + p_2$

b) $\mathbb{P}(D_3|D_1) = p_1^2 + (1 - p_1)p_2$.

4. Variables aleatorias

4:1. $R_X = \{0, 1, \cdots, 9\}$, $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{10} I_{R_X}(x)$

4:2. a)

$$f_X(x) = \frac{\binom{6}{x}\binom{4}{n-x}}{\binom{10}{n}} I_{\{R_X\}}(x)$$

b)

$$f_X(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{6}{10}\right)^x\left(\frac{4}{10}\right)^{n-x} I_{\{R_X\}}(x)$$

4:3. $c = \frac{1}{2^{n+1}-2}$

4:4. *a*) 0.3

b) 0.7

c) 0.55

d) 0.222

e) 0.45

4:5. *a*) $\mathbb{P}(X \geq 25) = \frac{3}{4}$

b) $\mathbb{P}(2.6 < X < 12.2) = \frac{1}{10}$

c) $\mathbb{P}(8 < X \leq 10 \cup 30 < X \leq 32) = \frac{1}{25}$

d) $\mathbb{P}(25 \leq X \leq 30) = \frac{3}{50}$

4:6. *a*) $\mathbb{P}(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}) = 0.7$

b) $\mathbb{P}(X = \frac{1}{3}) + \mathbb{P}(X = \frac{1}{2}) = 0.2$

4:7. $R_X = \{1, 2, \ldots, 12\}$, $\mathbb{P}(X = n) = (2n-1)\frac{1}{144}$ para $n \in R_x$

4:8. $R_X = \{1, 2, \ldots, 12\}$, $\mathbb{P}(X = n) = (2n-2)\frac{1}{12}\frac{1}{11}$ para $n \in R_x$

4:9. *a*) $\mathbb{P}(Y \leq y) = \dfrac{\binom{y}{n}\binom{r-y}{0}}{\binom{r}{n}}, \ \ y = n, n+1, \ldots, r.$

b) $\mathbb{P}(Z \geq z) = \dfrac{\binom{r-z+1}{n}}{\binom{r}{n}}, \ \ z = 1, 2, \ldots, r-n+1.$

4:10. *a*) $R_X = \{-n, 2-n, 4-n, \ldots, n-4, n-2, n\}$

b) $f_X(x) = \binom{3}{x}/2^3 \mathbb{1}_{\{-3,-1,1,3\}}(x)$

4:11. *a*) $R_X = \{1, 2, \ldots, 6\}$.

x	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{36}$	$3\frac{1}{36}$	$5\frac{1}{36}$	$7\frac{1}{36}$	$9\frac{1}{36}$	$11\frac{1}{36}$

b) $R_X = \{2, 3, \ldots, 12\}$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$2\frac{1}{36}$	$3\frac{1}{36}$	$4\frac{1}{36}$	$5\frac{1}{36}$	$6\frac{1}{36}$	$5\frac{1}{36}$	$4\frac{1}{36}$	$3\frac{1}{36}$	$2\frac{1}{36}$	$1\frac{1}{36}$

c) $R_X = \{-5, -4, -3, \ldots, 3, 4, 5\}$

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{36}$	$2\frac{1}{36}$	$3\frac{1}{36}$	$4\frac{1}{36}$	$5\frac{1}{36}$	$6\frac{1}{36}$	$5\frac{1}{36}$	$4\frac{1}{36}$	$3\frac{1}{36}$	$2\frac{1}{36}$	$1\frac{1}{36}$

4:12. *a*) $\mathbb{P}(X > 0) = 0.5918$

b) —

4:13.

$$\mathbb{P}(T > n) = \sum_{i=1}^{N-1} \binom{N}{i} \left(\frac{N-i}{N}\right)^n (-1)^{i+1}$$

Entonces tenemos que:

$$\mathbb{P}(T > n-1) = \mathbb{P}(T = n) + \mathbb{P}(T > n)$$

Y así notamos que $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T > n-1) - \mathbb{P}(T > n)$

4:14.
$$\mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{i=n}^{n+m-1} \frac{\binom{N}{i}\binom{M}{n+m-1-i}}{\binom{N+M}{n+m-1}}$$

4:15. $F_X(x) = \frac{x}{r^2}$, $f_X(x) = \frac{1}{r^2} I_{(0,r^2)}$

4:16.
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < \sqrt{3}s/2 \\ \sqrt{4x^2 - 3s^2}/s & \sqrt{3}s/2 \leq x < s \\ 1 & x \geq s \end{cases}$$
$$f_X(x) = \frac{4x}{s\sqrt{4x^2 - 3s^2}} \mathbb{1}_{(\frac{\sqrt{3}}{2}s,s)}(x)$$

4:17.

- $$F_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \mathbb{1}_{(0,1)}(x) \\ 1 - \frac{(2-x)^2}{2} & I_{x>1}(x) \end{cases}$$
- $$f_X(x) = x\mathbb{1}_{(0,1)}(x) + (2-x)\mathbb{1}_{(1,2)}(x)$$

4:18. Si $\beta > 0$
$F_Y(y) = y^\beta$ $f_Y(y) = \beta y^{\beta-1} I_{(0,1)}$
Si $\beta < 0$
$F_Y(y) = 1 - y^\beta$ $f_Y(y) = -\beta y^{\beta-1} I_{(0,1)}$

4:19.
$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} g(z)dz$$

4:20. $F(x) = 1 - (1-x)^5$, $x = 1 - 0.3981 = 0.6019$

4:21. $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$; $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$

4:22. $\mathbb{P}(X < \frac{1}{4}) = \frac{2}{5}$

4:23.

a) $\mathbb{P}(U > 0.1) = 0.9$

b) $\mathbb{P}(U > 0.2|U > 0.1) = 0.888$

c) $\mathbb{P}(U > 0.3|U > 0.1 \cap U > .02) = 0.875$

d) $\mathbb{P}(\{U > 0.3\} \cap \{U > 0.1\} \cap \{U > .02\}) = 0.7$

Tasa de riesgo o falla

4:24.
$$F(t) = 1 - e^{-\Lambda(t)}$$
$$f(t) = F'(t) = -e^{-\Lambda(t)}(-\Lambda'(t)) = e^{-\Lambda(t)}(\lambda(t))$$

Despejando $\lambda(t)$,
$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{e^{-\Lambda(t)}} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

Para interpretar $\lambda(t)$ suponga que un artículo que ha sobrevivido por un tiempo t y deseamos la probabilidad de que no sobreviva por un tiempo adicional dt. por esto consideramos $\mathbb{P}(t \leq T \leq t+dt|T>t)$ Ahora,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(t \leq T \leq t+dt|T>t) &= \frac{\mathbb{P}(t \leq T \leq t+dt, T>t)}{\mathbb{P}(T>t)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(t \leq T \leq t+dt)}{\mathbb{P}(T>t)} \\ &\approx \frac{f(t)}{F(t)}dt\end{aligned}$$

Entonces, $\lambda(t)$ representa la probabilidad condicional que una unidad que ha vivido t-tiempo falle.

4:25. —

4:26. —

4:27. Consideremos $v = 1 - F(u)$, entonces $dv = -f(u)du$

$$\int_0^\infty \lambda(u)du = \int_0^\infty \frac{f(u)}{1-F(u)}du = \int_0^\infty -\frac{1}{v}dv = \ln(v)I_0^\infty = \infty$$

4:28. $\lambda(t) = \beta$ Recordemos que la función exponencial tiene la propiedad sin memoria, lo que significa que la probabilidad de que el artículo siga funcionando dado que ya sobrevivió hasta el tiempo t es la misma que la de un artículo nuevo. Entonces la tasa de fallo de una función de distribución exponencial es constante.

4:29. $F_T(t) = 1 - e^{-\beta t^\alpha}$ $f(t) = (\beta\alpha t^{\alpha-1})e^{-\beta t^\alpha}$

4:30. —

5. Características de una Variable Aleatoria

5:1. *a*) $\mathbb{E}[X] = 5.00$ $\text{var}(X) = 8.33$

b) $\nu_3(X) = 0;$ $\nu_4(X) = 1.8014$

5:2. *a*) $M_T(w) = (1-4w)^{-1}$

b) $\mathbb{E}[T] = 4$ $\text{var}(T) = 16$

c) $\nu_3(T) = 2.0;$ $\nu_4(T) = 9.0$

5:3. *a*) Sesgada a la izquierda

b) No sesgada

c) Sesgada a la derecha

d) —

5:4. *a*) $\nu_4(X) = -1.2$

b) $\nu_4(X) = -0.8572$

5:5. El ajuste debe de ser del tipo $20 + 0.8X$

5:6. *a*) —

b) $\mathbb{E}[(X-c)^2]$ es mínimo para $c = \mu$.

5:7. $\mathbb{E}[Y] = 0$, $\text{var}(Y) = 1$, $\nu_3(Y) = 2$, $\nu_4(Y) = 9$

5:8. *a*) $E[Y] = 10$, $y_{.50} = 6.931$

b) $\text{var}(Y) = 100$, $\sigma_Y = 10$, $y_{.25} = 2.8768$, $y_{.75} = 13.8629$, $RI = 10.9861$

c) $y_{.90} = 23.025$

d) $\mathbb{P}(Y > \mu_Y + \sigma_Y) = 0.1353$

5:9. $M_W(t) = e^{at} M_Y(bt)$

5:10. Note que de existir la función generadora de momentos *f. g. m.* , ésta estaría dada por la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{e^{tk}}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

pero,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 e^t \quad \longrightarrow e^t, \quad \text{cuando } k \longrightarrow \infty$$

Luego, por la **prueba del cociente** para la convergencia de series, si $t > 0$, se sigue que $\lim_{k\nearrow\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, por lo que la serie diverge. Entonces no existe $\delta > 0$, para el cual la serie converge con $-\delta \leq t \leq t$. Por lo tanto no existe la función generadora de momentos de la *v. a.* X.

5:11. —

5:12. *a*) $\mathbb{P}(X = x) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

b) $\mathbb{E}[e^{tX}] = (pe^t + q)^n$

c) $\mathbb{E}[Y] = nq$ $\text{var}(Y) = npq$

d) $M_Y(t) = (p + qe^t)^n$

e) —

f) —

g) —

5:13. $M_U(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{(b-a)t}$

5:14. *a*) $M_Y(t) = \frac{e^t - 1}{t}$

b) $M_V(t) = \frac{e^{(a+b)t} - e^{at}}{(b+a-a)t}$

V se distribuye uniforme parámetros $(a, a+b)$.

5:15. —

5:16.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^b x \cdot f_X(x) dx \\
&= \int_0^b \left(\int_0^x du \right) f_X(x) dx \\
&= \int_0^b \left(\int_u^b f_X(x) dx \right) du \\
&= \int_0^b \mathbb{P}(X > u) du \\
&= \int_0^b [1 - F_X(u)] du
\end{aligned}$$

5:17. —

5:18. —

5:19. Sean A la cantidad apostada, G la ganancia y $G^* = G - A$ la ganancia neta.

a) $\mathbb{E}[A] = 10$ euros.

b) $\mathbb{E}[G] = 8.964$ y $\mathbb{E}[G^*] = -1.036$ euros.

c) Sea Y es el número de días que gana de los 5 consecutivos, entonces $\mathbb{P}(Y = 2) = 0.3452$.

6. Función generadora de momentos

6:1. *a*) $\mathbb{E}[X] = 5.00$ $\mathrm{var}(X) = 8.33$

b) $\nu_3(X) = 0; \quad \nu_4(X) = 1.8014$

6:2. *a*) $M_T(w) = (1 - 4w)^{-1}$

b) $\mathbb{E}[T] = 4$ $\mathrm{var}(T) = 16$

c) $\nu_3(T) = 2.0; \quad \nu_4(T) = 9.0$

6:3. *a*) Sesgada a la izquierda

b) No sesgada

c) Sesgada a la derecha

d) —

6:4. *a*) $\nu_4(X) = -1.2$

b) $\nu_4(X) = -0.8572$

6:5. El ajuste debe de ser del tipo $20 + 0.8X$

6:6. *a*) —

b) $\mathbb{E}[(X - c)^2]$ es mínimo para $c = \mu$.

6:7. $\mathbb{E}[Y] = 0$, $\mathrm{var}(Y) = 1$, $\nu_3(Y) = 2$, $\nu_4(Y) = 9$

6:8. *a*) $E[Y] = 10$, $y_{.50} = 6.931$

b) $\mathrm{var}(Y) = 100$, $\sigma_Y = 10$, $y_{.25} = 2.8768$, $y_{.75} = 13.8629$, $RI = 10.9861$

c) $y_{.90} = 23.025$

d) $\mathbb{P}(Y > \mu_Y + \sigma_Y) = 0.1353$

6:9. $M_W(t) = e^{at} M_Y(bt)$

6:10. Note que de existir la función generadora de momentos *f. g. m.* , ésta estaría dada por la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{e^{tk}}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

pero,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\frac{k}{k+1} \right)^2 e^t \quad \longrightarrow e^t, \quad \text{cuando } k \longrightarrow \infty$$

Luego, por la **prueba del cociente** para la convergencia de series, si $t > 0$, se sigue que $\lim_{k \nearrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$, por lo que la serie diverge. Entonces no existe $\delta > 0$, para el cual la serie converge con $-\delta \leq t \leq t$. Por lo tanto no existe la función generadora de momentos de la *v. a.* X.

6:11. —

6:12. *a*) $\mathbb{P}(X = x) = \frac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x} = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$

b) $\mathbb{E}[e^{tX}] = (pe^t + q)^n$

c) $\mathbb{E}[Y] = nq$ $\text{var}(Y) = npq$

d) $M_Y(t) = (p + qe^t)^n$

e) —

f) —

g) —

6:13. $M_U(t) = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{(b-a)t}$

6:14. *a*) $M_Y(t) = \frac{e^t-1}{t}$

b) $M_V(t) = \frac{e^{(a+b)t}-e^{at}}{(b+a-a)t}$

V se distribuye uniforme parámetros $(a, a+b)$.

6:15. —

6:16.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^b x \cdot f_X(x)dx \\
&= \int_0^b \left(\int_0^x du\right) f_X(x)dx \\
&= \int_0^b \left(\int_u^b f_X(x)dx\right) du \\
&= \int_0^b \mathbb{P}(X > u)du \\
&= \int_0^b [1 - F_X(u)]du
\end{aligned}$$

6:17. —

6:18. —

6:19. Sean A la cantidad apostada, G la ganancia y $G^* = G - A$ la ganancia neta.

a) $\mathbb{E}[A] = 10$ euros.

b) $\mathbb{E}[G] = 8.964$ y $\mathbb{E}[G^*] = -1.036$ euros.

c) Sea Y es el número de días que gana de los 5 consecutivos, entonces $\mathbb{P}(Y = 2) = 0.3452$.

7. Desigualdades de Probabilidad

7:1. *a*) $\mathbb{P}(6 < Y < 16) \geq 16/25$.

b) $c = 10$.

7:2. —

7:3. *a*)

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

b) $\mathbb{E}[X] = 3/2$; $\mathrm{var}[X] = 3/4$.

c)
- $\mathbb{P}(|Y - 3/2| \geq \sqrt{3}/2) = 1/4$.
- Regla empírica: $\mathbb{P}(|Y - 3/2| \geq \sqrt{3}/2) = 0.32$
- Chebyshev: $\mathbb{P}(|Y - 3/2| \geq \sigma) \leq 1$.

- $\mathbb{P}(|Y - 3/2| \geq 2(\sqrt{3}/2)) = 0$.
- Regla empírica: $\mathbb{P}(|Y - 3/2| \geq 2(\sqrt{3}/2)) = 0.05$
- Chebyshev: $\mathbb{P}(|Y - 3/2| \geq 2\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(2\sigma)2} = 1/2$

7:4. $\sigma_Y \leq 1/2$.

7:5.
- $\mathbb{P}(|Y - \mu| \leq 2\sigma) = 0.962$.
- Chebyshev: $\mathbb{P}(|Y - \mu| \leq 2\sigma) \geq 0.75$.
- Regla empírica: $\mathbb{P}(|Y - \mu| \leq 2\sigma) = 0.95$.

7:6. —

7:7.
- Para $k = 1$:
  - $\mathbb{P}(|U - \mu| \leq \sigma) \approx 0.577$
  - Chebyshev: $\mathbb{P}(|U - \mu| \leq \sigma) \geq 0$
- Para $k = 2$:
  - $\mathbb{P}(|U - \mu| \leq 2\sigma) = 1$
  - Chebyshev: $\mathbb{P}(|U - \mu| \leq \sigma) \geq 0.75$
- Para $k = 3$:
  - $\mathbb{P}(|U - \mu| \leq \sigma) = 1$
  - Chebyshev: $\mathbb{P}(|U - \mu| \leq 3\sigma) \geq 0.888$

7:8. *i)* $\mathbb{E}[X^3] \geq 15625$.

ii) $\mathbb{E}[\sqrt{X}] \leq 5$.

iii) $\mathbb{E}[\log(X)] \leq 3.22$.

iv) $\mathbb{E}[e^{-X}] \geq 1.389 \times 10^{-11}$.

7:9. —

7:10. —

7:11. *a)* $a = \frac{25}{3} - \sqrt{10\frac{130}{9}} = -3.685$ y $b = \frac{25}{3} + \sqrt{10\frac{130}{9}} = 20.352$.

b) Menor que 1/10.

7:12. *a)* $\mathbb{P}(|X - Y| > 15) = 0.1244$.

b) $\mathbb{P}(X > Y + 15) = 0.11067$.

c) $\mathbb{P}(Y > X + 15) = 0.11067$.

7:13. *a)* $\mathbb{P}(|N_{10}/10 - 1.7| \geq 1) \leq 0.17$

b) $\mathbb{P}(|N_{10}/10 - 1.7| \geq 1) \approx 0.0104$

8. Distribuciones paramétricas discretas

8:1. —

8:2. —

8:3. *a*) $\mathbb{P}(X \geq 3) = .5768$

b) $\mathbb{P}(X \geq 3 | X \geq 1) = .60702$

8:4. —

8:5. $\mathbb{E}[X] = 1.5$

8:6.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = i) &= \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\
&= \binom{n}{i} \left(\frac{x}{x+y}\right)^i \left(1 - \frac{x}{x+y}\right)^{n-i} \\
&= \binom{n}{i} \left(\frac{x}{x+y}\right)^i \left(\frac{x+y-x}{x+y}\right)^{n-i} \\
&= \binom{n}{i} \left(\frac{x}{x+y}\right)^i \left(\frac{y}{x+y}\right)^{n-i} \\
&= \binom{n}{i} \frac{x^i y^{n-i}}{(x+y)^n}
\end{aligned}$$

Sumando de los dos lados

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = i) &= \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \frac{x^i y^{n-i}}{(x+y)^n} \\
1 &= \frac{1}{(x+y)^n} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}
\end{aligned}$$

Entonces

$$(x+y)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

8:7. Sea Y la variable aleatoria Binomial con parámetros $(n, 1-p)$ que representa el números de fracasos. Entonces tenemos que $Y = n - X$ y por lo tanto $X = n - Y$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq i) &= \mathbb{P}(n - Y \leq i) \\
&= \mathbb{P}(n - i \leq Y) \\
&= \mathbb{P}(Y \geq n - i) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Y < n - i) \\
&= 1 - \mathbb{P}(Y \leq n - i - 1)
\end{aligned}$$

8:8. $\mathbb{P}(X = 5) = 0.2006$

8:9. *a*)

$$Y = \frac{X - b}{a - b} = \begin{cases} \frac{a-b}{a-b} = 1 & \text{si } X = a \\ \\ \frac{b-b}{a-b} = 0 & \text{si } X = b \end{cases}$$

Y es una variable aleatoria Bernoulli con parámetro p.

b) $\mathrm{var}(X) = (a-b)^2 pq$

8:10. $f_Y(y) = p^r \binom{-r}{y-r}(-1)^{y-r}(1-p)^{y-r} I_{S_Y}(y)$

8:11. *a)* $\mathbb{P}(X > 3) = 0.0016$

b) $\mathbb{P}(4 \leq X \leq 7) + \mathbb{P}(X > 9) = 0.001597$

c) $\mathbb{P}(3 \leq X \leq 5) + \mathbb{P}(7 \leq X \leq 10) = 0.007949$

8:12. $\mathbb{P}(X \geq x) = q^x$ $Y = \text{mín}(X, M)$

$$\mathbb{P}(Y = y) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = y) = pq^y, & \text{si } y < M \\ \\ \mathbb{P}(X \geq m) = q^m, & \text{si } y = M \end{cases}$$

8:13. *a)* $f_U(u) = pq^{\sqrt{u}}$

b) $f_V(v) = f_X(v-3) = pq^{v-3}$

8:14. *a)* Sea Y el número de personas que llegan a la exhibición en media hora. $\mu_Y = \lambda = 2.5$. $\mathbb{P}(Y \leq 4) = 0.8911$.

b) Sea X el número de personas que llegan a la exhibición en una hora. $\mu_X = \lambda = 5$. $\mathbb{P}(X \geq 12) = 0.005453$.

c) $\mathbb{E}[W] = 2455$.

d) Sea Z el número de días de la semana en la que llegan más de 7 personas entre las 11:00 y las 12:00hrs. $Z \sim \text{Bin}(5, p)$. Donde $p = \mathbb{P}(X > 7) = 0.133$.
$\mathbb{P}(Z \geq 4) = 0.0014$.

9. Distribuciones continuas

9:1. *a)* $p = 1/\sqrt{3}$.

b) $p = 0$.

c) $\text{med} = (a+b)/2$, $q_1 = (b+3a)/4$, $q_3 = (3b+a)/4$.

9:2. *a)* $\mathbb{P}(X \geq 10) = \frac{2}{3}$

b) $\mathbb{P}(X > 25 | X > 15) = \frac{1}{3}$

9:3. $\sigma^2 = 22.588$

9:4. *a)* $\mathbb{P}(X > 2) = 0.3678$

b) $\mathbb{P}(X > 10 | X > 9) = 0.6065$

9:5. $\mathbb{P}(X > 8) = 0.3678$

9:6. Debería dejar su casa a más tardar a las 12:08:28.8 PM.

9:7. si $y \geq 0$ $F_Y(y) = 1 - F_X(\frac{1}{y})$, si $y < 0$ $F_Y(y) = 1 - F_X(\frac{1}{y})$ y aplicando regla de la cadena $f_Y(y) = -f_X(\frac{1}{y})\left(\frac{-1}{y^2}\right) = \frac{1}{\pi(y^2+1)}$

9:8.

- Suponga $\beta > 0$, por lo tanto $S_Y = (0, 1)$. Sea $y \in (0, 1)$ $F_Y(y) = y^\beta$, $f_y(y) = \beta y^{\beta-1} I_{(0,1)}(y)$
- sup $\beta < 0$, $S_Y = (1, \infty)$. Sea $y > 1$ $F_Y(y) = 1 - F_X(y^{-|\beta|}) = 1 - y^{-|\beta|}$, $f_y(y) = -\beta y^{\beta-1} I_{(1,\infty)}(y)$

9:9. —

9:10. Y se distribuye Geométrica parámetro $(1 - e^{-\lambda})$.

9:11. N_{10} = número de veces que llueve más de 50 pulgadas en 10 años. $\mathbb{P}(N_{10} = 0) = 0.94$

9:12. *a*) $x = \frac{b+a}{2}$

b) $x = \mu$

c) $x = \frac{\ln(1/2)}{-\lambda}$

9:13. *a*) La *f. d. p.* es una constante, luego tiene una infinidad de modas o bien no tiene moda.

b) La moda es $X = \mu$.

c) La moda es $X = 0$.