Cálculo de Probabilidades I

Cuaderno de Ejercicios

Laboratorio

David López, Jordán Linares, Carlos Cruz y Caleb Gopar

7 de julio de 2023

Versión 0.41

Índice

Prefacio

Hace dos años se iniciaron las sesiones de ejercicios que llaman *laboratorios* de los cursos de Cálculo de Probabilidades I y II. Los encargados de los laboratorios inicialmente fueron David I. López Romero y L. Jordán Linares Pérez, alternándose los cursos. Cada uno de ellos colectó los ejercicios para sus sesiones. Ahora hemos empezado a recuperar las respuestas de los ejercicios y resolveremos una selección de ellos. Este cuaderno es el resultado de ellos.

Esta nueva versión incluye la colaboración de José Carlos Cruz Aranda de la segunda generación de laboratoristas, quien aportó más ejercicios e uniformizó la notación. Lo correspondiente para el laboratorio de Cálculo de Probabilidades II. Nuevamente se intercambiarán los cursos y este semestre de primavera 2023, Caleb Gopar Morales será el encargado del laboratorio de Cálculo de Probabilidades I y Carlos Cruz A. del laboratorio de Cálculo de Probabilidades II.

Cualquier error que identifique, comentario y/o sugerencia serán bienvenido. Mucho agradeceré me lo dirija a Ernesto Barrios `<ebarrios at itam.mx>`.

Ciudad de México, 2 de enero de 2023

1. Introducción

1. Sean A y B subconjuntos de Ω. Demuestre que

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow B^c \subseteq A^c$$

2. Demuestre que si A y B son conjuntos, entonces

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

3. Sean A, B y C conjuntos. Demuestre que

   a) $A - B = A - (A \cap B)$.
   b) $A - B = (A \cup B) - B$.
   c) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.
   d) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$.

4. Demuestre las leyes (o fórmulas) de De Morgan. Si $\{A_i | i \in I\}$ es una colección arbitraria de subconjuntos de Ω, entonces

   a) $\left(\bigcup_i A_i\right)^c = \bigcap_i A_i^c$
   b) $\left(\bigcap_i A_i\right)^c = \bigcup_i A_i^c$

5. Pruebe que el conjunto potencia de $\Omega \neq \emptyset$ arbitrario es una σ-álgebra.

6. Sea $\Omega = \{a, b, c, d\}$ y sean $A = \{a, b\}$ y $B = \{b, c\}$. Defina la familia $\mathcal{A} = \{A, B\}$. Determine si $\mathcal{A}$ es σ-álgebra. Encuentre la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}$, que se define por:

$$\sigma\{\mathcal{A}\} = \bigcap_i \{\mathcal{F}_i | \mathcal{F}_i \supset \mathcal{A}\}$$

7. Sean $\mathcal{F}_i$ para $i = 1, \ldots, n$ una colección de σ- álgebras. Defina a

$$\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$$

   Pruebe que $\mathcal{F}$ es σ-álgebra.

   (**Observación:** La demostración en versión infinita es análoga.)

8. Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ dos σ- álgebras de subconjuntos de Ω. Pruebe que $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ no necesariamente es una σ-álgebra.

9. Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω. Pruebe que la colección $\mathcal{F}^C = \{A^c | A \in \mathcal{F}\}$ es una σ-álgebra. Compruebe que $\mathcal{F}^C$ y $\mathcal{F}$ coinciden.

10. Sean A y B dos subconjuntos arbitrarios del espacio muestral Ω de un experimento aleatorio. ¿Qué conjuntos es necesario añadir a la colección $\{A, B\}$ para convertirla en la mínima $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω que contiene a A y a B?

2. Espacios de probabilidad

1. Se escoge un número al azar dentro del intervalo $(-1, 1)$ ¿Cuál es la probabilidad de que la ecuación cuadrática $ax^2 + x + 1 = 0$ tenga dos raíces reales distintas?

2. Un modelo de una ruleta puede construirse tomando un espacio de probabilidad uniforme sobre una circunferencia de radio 1, de manera que la probabilidad de que el apuntador caiga en una arco de longitud s es $s/2\pi$. Suponga que el círculo se divide en 37 zonas numeradas $1, 2, ..., 37$. Calcule la probabilidad de que la ruleta caiga en una zona par.

3. Una caja tiene 10 bolas numeradas $1, 2, ..., 10$. Una bola se elige al azar y una segunda bola se elige de las 9 restantes. Encuentre la probabilidad de que los números de las 2 bolas difiera en 2 o más.

4. Suponga que un experimento se realiza m veces. Para cualquier evento E del espacio muestral, sea $n(E)$ el número de veces que E ocurre, y defina $f(E) = n(E)/m$. Muestre que f es una medida de probabilidad. (Es decir, satisface los Axiomas de la Probabilidad.)

5. **Desigualdad de Bonferroni**. Muestre que dados dos eventos A, B se cumple

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

   Asimismo, verifique que si $\mathbb{P}(E) = 0.9$ y $\mathbb{P}(F) = 0.8$, entonces $P(E \cap F) \geq 0.7$.

6. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad donde $\mathcal{F}$ es una σ-algebra de subconjuntos de Ω y $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad que asigna probabilidad $p(> 0)$ a cada uno de los puntos de Ω.

   - Muestre que Ω debe tener un número finito de puntos. (**Sugerencia: muestre que Ω no puede tener más de $1/p$ puntos**.)
   - Muestre que si n es el número de puntos de Ω, entonces p debe ser $1/n$.

7. Sean $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ medidas de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números no negativos tales que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Demuestre que la combinación convexa

$$\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{P}_i$$

   es una medida de probabilidad.

8. Supongamos que tenemos dos dados honestos. Resuelva los siguientes incisos:

   a) Calcule la probabilidad de que la suma del resultado de ambos dados sea igual a ocho.

   b) Obtenga la probabilidad de que el resultado del primer dado sea menor al resultado del segundo.

   c) Calcule la probabilidad de que al menos sale un '6'.

9. Sean A, B y C tres eventos en el espacio muestral Ω. Suponga que

   - $A \cup B \cup C = \Omega$.
   - $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$.

- $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$.
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{5}{6}$.

Resuelva los siguientes incisos:

a) Calcule $\mathbb{P}(A \cap B)$.

b) ¿A, B y C forman una partición de Ω?

c) Encuentre $\mathbb{P}(C - (A \cup B))$.

d) Si $\mathbb{P}(C \cap (A \cup B)) = \frac{5}{12}$, halle $\mathbb{P}(C)$.

10. Un estudio sobre el número de sismos mayores a 5 grados en escala Richter que ocurren al año en la Ciudad de México demuestra que la probabilidad de tener $x+1$ sismos en un año es $\frac{1}{3}$ de la probabilidad de tener x sismos en un año. ¿Cuál es la probabilidad de que en un año ocurran dos o más sismos?

11. Pruebe *la desigualdad de Boole.*

$$\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mathbb{P}(A_n)$$

12. Un sistema consiste en 5 componentes, los cuales están trabajando apropiadamente o están fallando. Considere el experimento de observar el estado de cada una de las componentes y sea la salida del experimento un vector de la forma $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ donde x_i es 0 ó 1, dependiendo de que la componente i-ésima ha fallado o esté trabajando respectivamente

a) ¿Cuantós elementos hay en el espacio muestral?

b) Sea A, el evento que denota cuando las componentes 4 y 5 han fallado? ¿Cuántos elementos tiene el evento A?

13. Una escuela ofrece clases de tres idiomas: inglés, francés y alemán. Las clases están abiertas a todos los 100 estudiantes en la escuela. Hay 28 alumnos en la clase de inglés, 26 en la de francés, y 16 en la de alemán. Hay 12 estudiantes llevando inglés y francés, 4 llevando inglés y alemán, y 6 cursando alemán y francés. Hay además 3 estudiantes llevando los 3 idiomas.

a) Si se elige al azar un estudiante, ¿cuál es la probabilidad de que no esté llevando ninguno de los idiomas?

b) Si se selecciona aleatoriamente un estudiante, ¿cuál es la probabilidad de que esté estudiando un idioma exactamente?

c) Si 2 estudiantes se seleccionan al azar, calcule la probabilidad de que al menos uno esté llevando una clase de idiomas.

14. Sea una caja con r bolas rojas y b bolas negras. Se elige al azar una bola de la caja y luego se saca una segunda bola de las bolas restantes. Encuentra las siguientes probabilidades:

a) ambas bolas son rojas;

b) la primera bola es roja y la segunda es negra;

c) la primera bola es negra y la segunda es roja;

d) ambas bolas son negras.

3. Técnicas de conteo

1. ¿Cuántas placas diferentes en la Ciudad de México se pueden formar si los primeros tres lugares serán ocupados por letras (26) y los siguientes cuatro se ocuparán por números del 0 al 9?

2. A partir del inciso anterior. ¿Cuántas placas se pueden formar si no se permite la repetición de números y letras?

3. ¿De cuántas formas se pueden ordenar las palabras siguientes?

   a) FLUKE,

   b) PROPOSE,

   c) MISSISSIPPI.

4. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 10 personas en un banco si hay 4 sitios disponibles?

5. Se debe colocar a 5 hombres y 5 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los lugares pares. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

6. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 mujeres y 5 hombres alrededor de una mesa redonda, si deben sentarse alternadamente?

7. 10 matrimonios son colocados en una mesa redonda, calcule la probabilidad de que un esposo y una esposa no se sienten juntos.

8. Sean A y B dos conjuntos finitos tales que $|A| = m$ y $|B| = n$.

   a) ¿Cuántas funciones diferentes $f : A \to B$ se pueden definir?

   b) ¿Cuántas funciones inyectivas distintas $f : A \to B$ se pueden construir?

9. Un alumno de Cálculo de Probabilidades I debe escoger 7 de las 10 preguntas del examen final departamental.

   a) ¿De cuántas maneras puede elegir?

   b) Si las primeras 4 son obligatorias, ¿cuántas formas le quedan para escoger?

10. De cuántas maneras se pueden ordenar 3 novelas, 2 libros de matemáticas y un libro de química si

    a) Los libros se pueden ordenar sin restricciones,

    b) Los libros de matemáticas deben estar juntos y las novelas también,

    c) Las novelas deben estar juntas, pero los demás se pueden ordenar sin restricciones

11. Se quiere hacer un comité de 7 personas, compuesto por 2 miembros del partido A, 2 miembros del partido B y 3 independientes. Los miembros de dicho comité se elegirán de un grupo compuesto por 5 miembros del partido A, 6 miembros del partido B y 4 independientes. ¿Cuántos cómites son posibles?

12. Una caja contiene 40 fusibles en buen estado y 10 fusibles defectuosos. Si se eligen 10 fusibles al azar, ¿cuál es la probabilidad de que todos estén en buen estado?

13. Determine el número de distintos arreglos $(x_1, ..., x_n)$, tales que x_i es 0 ó 1 y

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k$$

14. ¿Cuántos subconjuntos existen de un conjunto de n elementos? (**Sugerencia:** Defina a las combinaciones de n en k como el número de subconjuntos de tamaño k y aplique el teorema del binomio de Newton.)

15. ¿Cuántas formas hay de tener cierta mano en el juego de póquer, para los siguientes casos? (Suponga que no se utilizan las cartas denominadas *Joker*)

   a) No se tiene dos cartas del mismo número.
   b) *Full house* (Consta de una tercia -tres números iguales- y un par -dos números iguales-).
   c) Póquer (cuatro números iguales).
   d) Color (Cinco cartas del mismo palo).

4. Independencia y probabilidad condicional

1. Considere que el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y el evento $B \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(B) > 0$. Muestre que la medida de probabilidad $\mathbb{P}_B$ definida para todo evento $A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

   es una medida de probabilidad formal. Esto es, satisface los *axiomas de probabilidad* o de *Kolmogorov.*

2. Si A y B son eventos independientes, demuestre que A y B^c son también independientes. ¿A^c y B^c son independientes?

3. Demuestra los siguientes enunciados:

   a) Si $\mathbb{P}(B) = 1$, entonces $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ para cualquier A.
   b) Si $A \subset B$, entonces $\mathbb{P}(B|A) = 1$ y $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$
   c) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A|B \cap C)\mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C)$

4. Un par de eventos A y B no pueden ser *mutuamente excluyentes* e *independientes*. Demuestra que si $\mathbb{P}(A) > 0$ y $\mathbb{P}(B) > 0$, entonces:

   a) Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces no pueden ser independientes.
   b) Si A y B son independientes no pueden ser mutuamente excluyentes.

5. Se eligen sin reemplazo dos dígitos al azar del 1 al 9. Si la suma de los dígitos es par, encuentre la probabilidad de que ambos dígitos sean impares.

6. Tres caballos A, B Y C participan en una carrera. El suceso "A vence a B"se designa por AB. El suceso "A vence a B el cual vence a C"se designa por ABC y así, sucesivamente. Se sabe que $\mathbb{P}(AB) = 2/3, \mathbb{P}(AC) = 2/3$ y $\mathbb{P}(BC) = 1/2$. Además, $\mathbb{P}(ABC) = \mathbb{P}(ACB)$, $\mathbb{P}(BAC) = \mathbb{P}(BCA)$ y $\mathbb{P}(CAB) = \mathbb{P}(CBA)$.

a) Calcule la probabilidad de que A venza, que B venza y que C venza.
b) Determine si AB, AC y CB son independientes.

7. En un tiro al blanco, la probabilidad de éxito es de $1/5$. Se lanzan 10 tiros de manera independiente.
   a) Calcule la probabilidad de tener éxito en al menos dos ocasiones.
   b) Si sabe usted que al menos en una vez se tuvo éxito, determine la probabilidad que al menos haya habido dos éxitos.

8. En una caja hay 15 pelotas de tenis de las cuales 9 han sido utilizada. Al día siguiente se seleccionan de la caja nuevamente 3 pelotas. ¿Calcula la probabilidad de que ninguna de estas 3 pelotas haya sido utilizada anteriormente?

9. Un componente de un motor de cohete falla 5 % de las veces que se enciende el cohete. Para conseguir mayor seguridad de que el motor funcionará, se duplica el componente n veces. El motor solo falla si las n componentes fallan a la vez. Asumiendo que las fallas en los componentes son independientes. ¿Cuál es el valor más pequeño que n puede tomar para garantizar que el motor funcione 99 % de las veces?

10. Gregor Mendel fue un monje que, en 1865, sugirió una teoría de la herencia basada en la ciencia de la genética. Él identificó individuos heterocigotos para color de flor que tenían dos genotipos (un r = genotipo color blanco recesivo y un R = genotipo color rojo dominante). Cuando estos individuos se apareaban, se observaba que $3/4$ de la descendencia tenían flores rojas y $1/4$ tenían flores blancas. La tabla siguiente resume este apareamiento; cada padre da uno de sus genotipos para formar el gen de la descendencia.

	Padre 2	
Padre 1	r	R
r	rr	rR
R	Rr	RR

Suponemos que es igualmente probable que cada padre contribuye con cualquiera de los dos genotipos y que, si uno o dos de los genotipos en un par es dominante (R), la descendencia tendrá flores rojas. ¿Cuál es la probabilidad de que un descendiente tenga

   a) al menos un genotipo dominante?,
   b) al menos un genotipo recesivo?,
   c) un genotipo recesivo, dado que la descendencia tiene flores rojas?

11. Imaginate que Harry Potter tiene el sombrero seleccionador y en el se encuentre 2 monedas: una moneda honesta y una moneda con águila en las 2 caras. Harry se pone a jugar con Ron para ver quien se toma la poción mulijugos y selecciona una moneda al azar, la lanza y cae águila.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda sea honesta?
   b) Se lanza la misma moneda una segunda vez y cae águila. ¿Cuál es la probabilidad que sea la moneda honesta?

12. Un estudiante de su clase se encuentra realizando su examen final de Cálculo de Probabilidades 1 que consta de 20 preguntas con respuestas de verdadero y falso. El estudiante sabe las respuestas a N de las preguntas, las cuales contesta correctamente. El resto las contesta aleatoriamente. La probabilidad condicional de que el estudiante sepa la respuesta de una pregunta, dado que la contestó correctamente, es de 0.824. Calcular N.

5. Probabilidad total y teorema de Bayes

1. Sean A, B y C eventos, demuestre:

   a) Si $\mathbb{P}(A|B) = P(A|B^c)$, entonces A y B son independientes.

   b) Si $\mathbb{P}(A|C) > \mathbb{P}(B|C)$ y $\mathbb{P}(A|C^c) > \mathbb{P}(B|C^c)$, entonces $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(B)$.

   c) Si $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq 0$ y $\mathbb{P}(C|A \cap B) = \mathbb{P}(C|B)$, entonces $\mathbb{P}(A|B \cap C) = \mathbb{P}(A|B)$

2. Sean $B_1, B_2, \ldots, B_n$ eventos mutuamente excluyentes y $B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$. Suponga que $\mathbb{P}(B_j) > 0$ y que $\mathbb{P}(A|B_j) = p$ para $j = 1, 2, \ldots, n$ y $p \in (0, 1)$. Pruebe que $\mathbb{P}(A|B) = p$.

3. Una prueba de laboratorio consiste en analizar una muestra de fluidos para detectar la COVID-19 que padece el 1 % de la población. Por pruebas del laboratorio se sabe que si la persona está enferma, con probabilidad 0.98 la prueba es positiva. En caso de no estar enfermo, la prueba da negativo con probabilidad 0.95. Si se selecciona a una persona aleatoriamente en la población y se le aplica la prueba, y esta resulta positiva, ¿cuál es la probabilidad de que la persona esté enferma?

4. Un chimpancé ha parido un cachorro y no se sabe cuál de los 2 chimpancés machos sea el padre. Se cree que el macho 1 es el padre con probabilidad p, y el macho 2 con probabilidad $1 - p$. Se toman muestras del DNA de ambos machos y de la madre. Un marcador genético muestra que la madre tiene la pareja de genes (A, A). El macho 1 tiene la pareja (a, a), y el macho 2 tiene la pareja (A, a). Si resultase que el cachorro tiene la pareja de genes (A, a), muestre que la probabilidad de que el macho 1 sea el padre es de $2p/(1 + p)$.

5. Tres cocineros, A, B y C, hacen una clase especial de pastel, respectivamente, cada cocinero tiene probabilidad .02, .03 y .05 de que no se esponje. En el restaurante donde trabajan, A hornea 50 por ciento de los pasteles, B 30 por ciento y C 20 por ciento. ¿Qué proporción de 'fallas' es causado por A?

6. Una firma farmacéutica utiliza tres planes analíticos para el diseño y desarrollo de un producto en particular. Por razones de costos, los tres planes son usados en tiempos distintos. De hecho, los planes 1,2 y 3 son usados en 30 %, 20 % y 50 % de los productos respectivamente. *La tasa de defectuosos* son diferentes para los distintos planes. A saber,
$$\mathbb{P}(D|E_1) = 0.01, \qquad \mathbb{P}(D|E_2) = 0.03 \qquad \mathbb{P}(D|E_3) = 0.02$$
   donde $\mathbb{P}(D|E_j)$ es la probabilidad de un producto defectuoso bajo el j-ésimo plan. Si se selecciona un producto al azar y se ve que es defectuoso, ¿bajo cuál de los planes es más posible que haya sido producido?

7. Se observa que hombres y mujeres reaccionan de modo diferente a un conjunto determinado de circunstancias; se sabe que 70 % de las mujeres reaccionan positivamente a estas circunstancias mientras que de este mismo modo reaccionan solo 40 % de los

hombres. Un grupo de 20 personas, 15 mujeres y 5 hombres, se sometió a estas circunstancias y a los sujetos se les pidió describieran sus reacciones en un cuestionario escrito. Una respuesta elegida al azar de las 20 fue negativa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido de un hombre?

8. **Problema de los tres prisioneros:** A tres prisioneros, a quienes llamaremos A, B y C, les informa su celador que se ha escogido al azar a uno de ellos para ser ejecutado, dejando a los otros dos en libertad. El prisionero A sabe que tiene probabilidad $1/3$ de ser ejecutado y le pide al celador que le diga en secreto cuál de sus dos compañeros saldrá libre argumentando que por lo menos uno de ellos saldrá en libertad y que saber esta información no cambia su probabilidad de ser ejecutado. El celador, por el contrario, piensa que si el prisionero A sabe cuál de sus dos compañerros saldrá en libertad, la probabilidad de ser ejecutado aumenta a $1/2$. ¿Quién tiene la razón? Justifique su respuesta.

9. **La paradoja de la caja de Bertrand**. Se tienen tres cajas y cada una de ellas tiene dos monedas. La caja C_1 contiene dos monedas de oro. La caja C_2 contiene una moneda de oro y una de plata. La caja C_3 contiene dos monedas de plata. Se selecciona una caja al azar y de allí se escoge una moneda. Si resulta que la moneda escogida es de oro, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la caja con dos monedas de oro?. Responda los siguientes incisos.

   a) Argumente con palabras que la respuesta es $1/2$.

   b) Demuestre que la respuesta es $2/3$

10. **La urna de Poyla:** En una urna se tienen r bolas rojas y b bolas blancas. Un ensayo consiste en tomar una bola al azar y regresarla a la urna junto con k bolas del mismo color. Se repite este ensayo varias veces y se define el evento R_n como aquel en el que se obtiene una bola roja en la n-ésima extracción.

    a) Demuestre por inducción sobre n que $\mathbb{P}(R_n) = \dfrac{r}{r+b}$. (**Sugerencia:** Calcule el evento R_n para $n = 1, 2$ para comprender mejor el comportamiento de este experimento aleatorio).

    b) Calcule $\mathbb{P}(R_1|R_2)$.

11. Una planta de manufacturas hay tres métodos de producción A, B, C en donde $A = .30, B = .45, C = .25$ de la producción total. Las líneas tienen una tasa de defectuosos %2, %3, %2. Se elige de una planta un artículo al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

6. Variables aleatorias

1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad tal que $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ ¿Cuáles son todas las variables aleatorias definidas sobre este espacio de probabilidad?

2. Sea $\Omega = \{-1, 0, 1\}$ y $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{0\}, \{-1, 1\}, \Omega\}$. Considera la función identidad $X(\omega) = \omega$. Demuestra que X^2 es una variable aleatoria, pero X no lo es.

3. Pruebe que si $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ definida por $X = c$ para toda $x \in \mathbb{R}$ entonces X es una variable aleatoria.

4. Sean X, Y variables aleatorias, y c una constante. Pruebe que:

a) cX es una variable aleatoria.
b) $X+Y$ es variable aleatoria.
c) XY es variable aleatoria.
d) Si $Y \neq 0$ entonces X/Y es variable aleatoria.
e) $\{X \vee Y\} = \text{máx}\{X,Y\}$ y $\{X \wedge Y\} = \text{mín}\{X,Y\}$ son variables aleatorias.
f) $|X|$ es variable aleatoria.

5. Compruebe que las siguientes funciones son f.m.p. propias:

   a) $f(x) = \frac{n!}{(x)!(n-x)!}\, p^x(1-p)^{n-x}$ si $x = 1,2,...,n$, ($0 < p < 1$ constante)
   b) $g(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ si $x = 0,1,2,...$
   c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{2^x} & \text{si } x = 1,2,... \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
   d) $q(x) = \begin{cases} \dfrac{(1-p)p^{x-1}}{(1-p)^n} & \text{si } x = 1,...,n, \quad (0 < p < 1 \text{ constante}) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

6. En un grupo grande de objetos una fracción θ son defectuosos. Si el número de extracciones (con reemplazo) necesarias para obtener el primer objeto defectuoso es una variable aleatoria X con función de probabilidad

$$\mathbb{P}(X = j) = A(0.95)^{j-1}, j = 1,2,\ldots$$

   a) Calcule el valor de A.
   b) ¿Cuál es la proporción θ de defectuosos?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario examinar más de 20 objetos antes de obtener el primer defectuoso?

7. Suponga que un dado justo es lanzado dos veces. Muestre los valores posibles de las siguientes variables aleatorias y calcule su correspondiente f. m. p.

   a) El valor máximo de las caras obtenidas.
   b) El valor mínimo de las caras obtenidas.
   c) La suma de las caras obtenidas.

8. Considere una caja que tiene 12 bolas marcadas con los número 1,2,...,12. Dos realizaciones independientes son hechas del experimento de seleccionar una bola de la caja al azar. Sea X el mayor de los números de las bolas seleccionadas.

   a) Calcule la f.m.p de X cuando la selección es con reemplazo.
   b) Calcule la f.m.p de X cuando la selección es sin reemplazo.

9. Sea X la diferencia entre el número de soles y el número de águilas obtenidos mediante n volados de una moneda justa.

   a) ¿Cuáles son los valores posibles de X?
   b) Para $n = 3$, calcule la f.m.p. de X.

10. Se tiene una diana dividida en n anillos circulares concéntricos de radio $1/n, 2/n, ..., n/n$. Se lanza un dardo al azar y si cae entre los discos $D_i - D_{i-1}$, $i = 1, ..., n$, se gana usted $n - i + 1$ pesos. Sea X la variable aleatoria que representa lo ganado. Encontrar la función masa de probabilidad.

11. Cualquier punto en el intervalo $[0, 1)$ puede ser representado por su expansión decimal $.x_1x_2...$ Suponga que un punto de este intervalo es escogido al azar. Sea X el primer dígito de la expansión decimal que representa al punto. Determine la función masa de probabilidad (f. m. p.) de X.

12. En una caja tenemos tres bolas numeradas 1,2 y 3. Sacamos tres bolas con reposición y llamamos X_i , $i = 1, 2, 3$ al resultado de la i-ésima extracción. Sea $\bar{X}$ el promedio de estas variables:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

Determine la función masa de probabilidad de X. Calcule la probabilidad de que exactamente dos extracciones sean iguales a 3.

13. Supongamos que estamos en un programa de televisión y tenemos que pasar por un juego en donde enfrente nos ponen 2 cajas, una sólida y una de madera que se rompe al pisarla. ¿Cuál es la probabilidad que llegues al otro extremo sin romper ninguna caja, si para llegar al final tienes que pisar 18 cajas?Si tu eres la segunda persona en pasar y la primera llego a la caja 9. ¿Cuál es la probabilidad que llegues al final sin caerte?

7. Cálculo de probabilidades con variables aleatorias

1. Suponga una caja que tiene r bolas enumeradas $1, 2, ..., r$. Una muestra aleatoria de tamaño n es seleccionada sin reemplazo. Sea Y el mayor de los números de las bolas seleccionadas y sea Z el menor de estos números.

   a) Calcule la probabilidad de que $\mathbb{P}(Y \leq y)$.

   b) Calcule la probabilidad de que $\mathbb{P}(Z \geq z)$.

2. Suponga que lanzamos una moneda tres veces. Sea X la variable aleatoria que determina el número de águilas. Determine:

   a) El espacio muestral Ω.

   b) La función de masa de probabilidades.

   c) La función de distribución. Asmismo, grafíquela y pruebe que, en efecto, es una función de distribución de probabilidad acumulada.

3. Calcule la función de distribución de las variables aleatorias definidas en el ejercicio del laboratorio 6, sobre el par de dados y las funciones de probabilidad para distintas variables aleatorias, definidas, máximo, mínimo y suma.

4. El número de personas que entran a una tienda departamental en un período de una hora es modelado por medio de una variable aleatoria X con función de masa:

$$f_X(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} \mathbb{1}_{\{0,1,2,...\}}(x)$$

a) Demuestre que es una función de masa de probabilidades.

b) Determine la probabilidad de que entren más de 4 personas, dado que entraron al menos 2 en una hora.

5. La variable aleatoria X representa el rendimiento mensual de un activo financiero y tiene función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{4x} & x < 0 \\ e^{-2x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Encuentre la función de distribución acumulada $F_X(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

6. La duración de llamadas telefónicas de celular es una variable aleatoria X medida en minutos cuyo fdp está dada por

$$f_X(x) = kxe^{-\frac{x}{4}}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}, \quad \text{donde } k > 0$$

a) Halle el valor de k.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una llamada dure entre 5 y 10 minutos?

c) Encuentre la función de distribución $F_X(x)$.

d) Calcule la probabilidad de que una llamada dure menos de 10 minutos dado que ya duro más 5 minutos.

7. La función de masa de probabilidades de una variable aleatoria X es dada por

$$f_X(x) = \frac{c\lambda^x}{x!}\mathbb{1}_{\{0,1,2,\dots\}}(x)$$

donde $\lambda > 0$ es una constante. Encuentre

a) El valor c para que $f_X(x)$ sea una función de masa de probabilidades.

b) $\mathbb{P}(X = 0)$.

c) $\mathbb{P}(X > 2)$.

8. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \theta x & \text{si } 0 < x \leq 1/2, \\ \theta(1-x) & \text{si } 1/2 < x < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Encuentre el valor de la constante que hace a $f(x)$ una función de densidad

b) Encuentre los valores de a y b tales que $\mathbb{P}(a < X < b) = 7/16$ y $b - a$ es mínimo

9. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad como aparece abajo. Grafique $f(x)$ y compruebe que efectivamente es una función de densidad. Además encuentre y grafique la función de distribución correspondiente.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{2} & \text{si } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule:

a) $\mathbb{P}(|X| < \frac{1}{2})$,

b) $\mathbb{P}(X < 0)$,

c) $\mathbb{P}(|X| < \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$,

d) $\mathbb{P}(|X| > \frac{1}{2})$.

10. Grafique cada una de las siguientes funciones y compruebe que son funciones de distribución. Determine, en cada caso, si se trata de la función de distribución de una variable aleatoria discreta o continua. Encuentre además la correspondiente función de probabilidad o de densidad.

a) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

b) $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

c) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1/5 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 3/5 & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$

11. Sea X una variable aleatoria con función de probabilidad acumulada F dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{3x}{5} & 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ \frac{1+3x}{5} & \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \\ \frac{2+3x}{5} & \frac{2}{3} \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

a) Calcule $P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4})$.

b) Verifique que $P(X = \frac{1}{3}) + P(X = \frac{1}{2}) = 0.2$

12. **Variables aleatorias mixtas.** Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $c > 0$ una constante. Encuentre y grafique la función de distribución de las siguientes variables aleatorias:

a) $U = \text{mín}\{X, c\}$.

b) $V = \text{máx}\{X, c\}$.

Estas variables aleatorias no son discretas ni continuas, son ejemplos de variables aleatorias mixtas. Para estas distribuciones puede comprobarse que no existe la función de densidad, es decir, no existe una unción $f(u)$, en el sentido usual, tal que para todo número real x,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du.$$

8. Función de riesgo y de supervivencia (sobrevivencia)

1. En el ITAM, el 40 % de los alumnos son foráneos. Se extrae una muestra de 4 alumnos (independiente) y se contabilizan el número de foráneos de la muestra.

   a) Encuentre $f_X(x)$.

   b) Encuentre $F_X(x)$.

2. Obtenga la función de densidad de la variable aleatoria X con función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2/4 & 0 \leq x < 1 \\ (x+1)/3 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

3. La variable aleatoria X modela el tiempo de vida en años de un reproductor de música, con función de supervivencia (sobrevivencia)

$$S_X(x) = \exp\left\{ -\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} \right\} \quad \text{para} \quad x > 0$$

   a) Encuentre la función de distribución de X.

   b) Obtenga la función de densidad de X.

   c) Si se sabe que $\mathbb{P}(X > 3) = e^{-1}$ y $\mathbb{P}(X > 6) = e^{-4}$ Determine la probabilidad de que el componente siga funcionando después de 4 años.

   d) ¿Qué puede decir del comportamiento de la tasa de riesgo a partir de los parámetros α y β?

4. La función de riesgo $h_X(x) = 0.5x^{-1/2}$ para $x > 0$. Encuentre la función de densidad de probabilidades.

5. La variable aleatoria X tiene la función de masa de probabilidades:

$$f_X(x) = p(1-p)^x \mathbb{1}_{\{0,1,2,\ldots\}}(x)$$

   para algún valor de p fijo, con $0 < p < 1$.

   a) Demuestre que es función de masa de probabilidades para cualquier valor de $p \in (0, 1)$.

   b) Demuestre que la función de distribución es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - (1-p)^{\lfloor x \rfloor + 1} & x \geq 0 \end{cases}$$

   donde $\lfloor x \rfloor$ denota la parte entera de x.

   c) Encuentre la función de supervivencia (sobrevivencia).

   d) ¿Cuál es su tasa de riesgo?

   e) Para $n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m \geq 1$, demuestre que X satisface la siguiente propiedad:

$$\mathbb{P}(X \geq n + m | X \geq n) = \mathbb{P}(X \geq m)$$

6. Sea X una variable aleatoria con función de distribución

$$F(x) = 1 - e^{-2x}$$

   a) Obtenga su función de densidad.
   b) Obtenga la función de supervivencia (sobrevivencia).
   c) Obtenga la tasa de riesgo.

7. El tiempo de espera en minutos en una fila de supermercado es modelado por medio de una variable aleatoria con función de supervivencia

$$S_X(x) = e^{-cx} \quad \text{con } c > 0$$

   a) Hallar la función de densidad de X.
   b) Obtenga la tasa de riesgo.
   c) Calcular la probabilidad de que una persona tarde en total más de 10 minutos en la fila dado que ya ha estado formado al menos 2 minutos.

8. Se tiene una variable aleatoria X con la siguiente función de densidad

$$f(x) = \frac{\theta\alpha^{\theta}}{x^{\theta+1}} \mathbb{1}_{[\alpha,\infty)}(x)$$

   a) Pruebe la función de distribución de X es

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\theta} \mathbb{1}_{[\alpha,\infty)}(x)$$

   b) Obtenga la función de supervivencia.
   c) Obtenga la tasa de riesgo asociada.
   d) Suponga $\alpha = 5$. Si $\mathbb{P}(X \leq 10) = 0.8$ encuentre el valor de θ. (Use 4 decimales).

9. Pruebe la verdad o falsedad de la siguiente afirmación:
   Si $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones de densidad y si los valores θ_1 y θ_2 son tales que $\theta_1 + \theta_2 = 1$ con $\theta_1\theta_2 \geq 0$, entonces $\theta_1 f_1(x) + \theta_2 f_2(x)$ es también una función de densidad.

10. Pruebe la verdad o falsedad de la siguiente afirmación:
    Si $F(x)$ y $G(x)$ son funciones de distribución y si los valores θ_1 y θ_2 son tales que $\theta_1 + \theta_2 = 1$ con $\theta_1\theta_2 \geq 0$, entonces $\theta_1 F(x) + \theta_2 G(x)$ es también una función de distribución.

9. Información obtenida de las variables aleatorias

1. Demuestre que si $p_1 \leq p_2$ son dos probabilidades estrictamente positivas, entonces $c_{p_1} \leq c_{p_2}$, donde c_{p_i} representa el cuantil asociado a p_i, con $i = 1, 2$

2. Calcule los cuantiles al 70 %, 80 % y 90 % para las variables aleatorias con función de probabilidad:

   a)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1/10	5/10	1/10	2/10	1/10

b)

x	1	2	$\cdots$	n	$\cdots$
$f(x)$	1/2	1/4	$\cdots$	$1/2^n$	$\cdots$

3. Calcule todos los cuartiles, si existen, de la función de distribución:

   a) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

   b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \cos x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 1 & \text{si } x > \pi/2. \end{cases}$

4. Calcule la moda (o modas) de las siguientes distribuciones de probabilidad:

   a) $f(x) = \begin{cases} 1 - p & \text{si } x = 0, \quad (0 \leq p \leq 1) \\ p & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

   b) $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

5. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea A un subconjunto de Ω tal que $\mathbb{P}(A) > 0$. Se define a la variable aleatoria $X : \Omega \to \{0, 1\}$ como sigue

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin A \\ 1 & \omega \in A \end{cases}$$

   a) Encuentre la función de distribución de X y grafíquela.

   b) Pruebe que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(A)$.

6. Sea la función de densidad de una variable aleatoria Y dada por

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi(1 + y^2)} & -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

   a) Encuentre $\mathbb{E}(Y)$.

   b) Encuentre la función de distribución.

   c) Encuentre el cuantil 50.

7. Un jugador recibirá \$100 si obtiene sol en su primer lanzamiento, \$75 si obtiene su primer sol en su segundo lanzamiento, \$50 si obtiene su primer sol en su tercer lanzamiento, \$25 si obtiene su primer sol en su cuarto lanzamiento y, posteriormente, \$0. Supongamos que la probabilidad de obtener sol es 0.4 en cualquier lanzamiento y los lanzamientos son independientes. Determine el monto de pago esperado que recibirá el jugador.

8. El tiempo de espera en minutos en una fila de supermercado es modelado por medio de una variable aleatoria X con función de distribución

$$F_X(x) = 1 - e^{-cx} \quad \text{con } c > 0$$

   En promedio una persona tarda en la fila 5 minutos.

a) Obtenga el valor de c.

b) Obtenga los cuartiles de X.

9. Sea X v.a. tal que
$$\mathbb{P}(X = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X = -1)$$
Encuentre $c \neq 1$ tal que $\mathbb{E}(c^X) = 1$.

10. Para una v.a. entera no negativa X, muestre que:
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P[X \geq k]$$

11. Para una v.a. Y continua no negativa con función de distribución $F_Y(y)$ definida, muestre que:
$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^{\infty} (1 - F_Y(y))dy$$

12. Obtenga la esperanza de las variables aleatorias asociadas a las funciones de distribución de la pregunta 3.

10. Momentos

1. Calcule la esperanza de la variable aleatoria X con función de probabilidad:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	1/8	2/8	1/8	2/8	2/8

2. Calcula la esperanza de la variable aleatoria X con función de probabilidad:
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$
Donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Esta variable aleatoria se conoce como distribución exponencial.

3. Calcula la esperanza de la variable aleatoria Y con función de probabilidad:
$$f_Y(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y} \mathbb{1}_{\{0,1,\ldots,n\}}(y)$$
Donde $n \in \mathbb{Z}^+$ y $0 \leq p \leq 1$. A esta distribución se le conoce como distribución binomial.

4. Calcula la esperanza de la variable aleatoria U con función de probabilidad:
$$f_U(u) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(u)$$
donde $a < b$, con $a, b \in \mathbb{R}$. A esta distribución se le conoce como distribución uniforme continua.

5. Calcula la esperanza de la variable aleatoria Z con función de probabilidad:
$$f_X(x) = p(1-p)^{z-1} \mathbb{1}_{\{1,2,\ldots\}}(z)$$
A esta distribución se le conoce como distribución geométrica.

6. Calcule el valor esperado y la varianza de las variable aleatoria X si tiene como función de probabilidad:

   a) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

   b) $g(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x = 1, 2, ..., n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

7. Calcula el n-ésimo momento de la variable aleatoria X con función de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

8. La calificación promedio en una prueba de Cálculo de Probabilidades I es de 62.5 con una desviación estándar de 10. El profesor considera que el examen ha sido demasiado largo y/o difícil. En consecuencia él desea ajustar las calificaciones X de manera que el promedio sea ahora de 70 con una desviación estándar de 8 puntos ¿Qué ajuste del tipo $a + bX$ debería utilizar?

9. Sea X una variable aleatoria con media μ y σ^2.

   a) Evalúe $\mathbb{E}[(X-c)^2]$ en términos de μ y σ^2, donde c es una constante.

   b) ¿Para qué valores de c es mínimo $\mathbb{E}[(X-c)^2]$?

10. Sea X una v.a. continua con función de densidad de probabilidad:

$$f_X(x) = \frac{(k+1)x^k}{c^{k+1}}, \qquad 0 < x < c, \qquad k > 0.$$

   Demuestra que el coeficiente de variación de X es igual a $\frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+3)}}$.

11. Considere la v.a. X que denota las desviaciones sobre el peso neto en un proceso de llenado con cierta máquina, y sea su función de densidad de probabilidad (f.d.p.) dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{10}\mathbb{1}_{(0,10]}(x)$$

   Determine e interprete los resultados de los coeficientes de asimetría y curtosis dados respectivamente por

$$\nu_3(X) = \frac{\mathbb{E}[(X-\mu_X)^3]}{\{\mathbb{E}[(X-\mu_X)^2]\}^{3/2}}, \qquad \nu_4(X) = \frac{\mathbb{E}[(X-\mu_X)^4]}{\{\mathbb{E}[(X-\mu_X)^2]\}^2}$$

12. Sea Y variable aleatoria con función de probabilidad

$$f(y) = 12y^2(1-y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$$

   Calcula:

   a) Moda

   b) Media

   c) Varianza

   d) Desviación estándar

   e) Coeficiente de variación

   f) Coeficiente de sesgo

   g) Coeficiente de curtosis

11. Función generadora de momentos

1. Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2^x & \text{si } x = 1, 2, ... \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la función generadora de momentos de X y, a partir de ella, calcule la media y la varianza de X.

2. Sea Y variable aleatoria, tal que $Y \sim Geo(p)$, es decir la función de probabilidad de Y es

$$f(y) = pq^{y-1}\ \mathbb{I}_{\{1,2,...\}}(y)$$

Donde $q = 1 - p$. Demuestre que la función generadora de momentos para Y es

$$M(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t}$$

Encuentre la media y la varianza de Y usando la función generadora de momentos.

3. Sea X variable aleatoria con función generadora de momentos $m_X(t)$. Defina a $\varphi_X(t) = \ln(m_X(t))$ Pruebe que:

   a) $\varphi_X(0) = 0$.
   b) $\varphi'_X(0) = \mathbb{E}(X)$
   c) $\varphi''_X(0) = Var(X)$.

4. Sea X v.a. con función generadora de momentos $m_X(t)$ y sean a y b constantes. Demuestre:

   a) $m_{aX+b}(t) = e^{tb}m_X(at)$
   b) $m_X(t) \geq 0$ para toda $t \in \mathbb{R}$
   c) $m_{2X}(t) = m_X(2t)$.

5. Una variable aleatoria X tiene la siguiente función generadora de momentos $m_X(t) = (0.2e^t + 0.8)^8$. Determine:

   a) La distribución de la variable X:
   b) $\mathbb{P}[X > 0]$ y $\mathbb{P}[1 \leq X \leq 4]$.
   c) Esperanza y varianza.

6. El sueldo mensual de gerentes en una pequeña compañía modelada en miles de pesos es una variable aleatoria X con función generadora de momentos

$$M_X(t) = \frac{1}{(1 - 25t)^4}$$

Calcule:

   a) Coeficiente de variación.
   b) Coeficiente de asimetría.
   c) Coeficiente de curtosis.

7. Suponga que la duración aleatoria T en minutos de una conversación de negocios por teléfono sigue una f.d.p dada por

$$f_T(t) = \frac{1}{4}e^{-t/4}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(t)$$

Determine:

a) La función generadora de momentos $m_T(w) = \mathbb{E}(e^{wT})$.

b) $\mathbb{E}(T)$ y $Var(T)$.

c) Los coeficientes de asimetría y curtosis.

8. Con referencia al problema anterior muestre que la variable aleatoria $Y = \left(\frac{T-4}{4}\right)$ tiene media cero, varianza 1, pero los mismos coeficientes de asimetría y curtosis que la variable aleatoria T.

9. Sea $M_X(t)$ la función generadora de momentos con $t \in [-c, c]$, donde $c > 0$. Defina a $Y = aX + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Obtenga la función generadora de momentos de Y y muestre cuál es su radio de existencia.

10. Sea $M_X(t)$ finita en $t \in [-c, c]$, donde $c > 0$. Pruebe que

$$\lim_{n\to+\infty} \left[M_X\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n = e^{t\mathbb{E}(X)}$$

11. Muestre que si X variable aleatoria tiene función de probabilidad

$$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\mathbb{I}_{\{0,1,\ldots\}}(x)$$

Con $\lambda > 0$, entonces

$$\mathbb{E}[X^n] = \lambda\mathbb{E}[(X+1)^{n-1}]$$

Ahora usa lo demostrado para calcular $\mathbb{E}[X^3]$.

12. El tiempo en años que una persona deja su dinero invertido en un banco es una variable aleatoria X cuya función generadora de momentos es

$$M_X(t) = \frac{1}{(1-2t)^2} \qquad \text{para } t < 1/2$$

Si una persona invierte un capital inicial de \$100 a una tasa efectiva del 10 % anual, por lo que el valor acumulado de su inversión si retira su dinero en X años será $g(X) = 100(1.10)^X$. Determine $\mathbb{E}[g(X)]$

12. Repaso variables aleatorias

1. Sea X una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $I = [0, 1]$ y sea Y la variable aleatoria definida como sigue:

$$y(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1/2 \\ x - 1/2 & \text{si } x > 1/2 \end{cases}$$

Encuentre la función de distribución (fpa) de $Y(X)$ y su correspondiente función de densidad de probabilidad (fdp).

2. Sea Y una función de densidad

$$f(y) = \begin{cases} cye^{-2y} & 0 \leq y < +\infty \\ 0 & \text{c.o.c} \end{cases}$$

   a) Encuentre el valor de c que haga de $f(y)$ una función de densidad.
   b) Obtenga la media y la varianza para Y.
   c) Calcula la función generadora de momentos de Y.
   d) Verifique con la función generadora de momentos que la media y varianza son las mismas.

3. Suponga que Y es una variable aleatoria con una función $M(t)$ generadora de momentos.

   a) ¿Cuál es $M(0)$?
   b) Si $W = 3Y$, demuestre que la función generadora de momentos de W es $M(3t)$.
   c) Si $X = Y - 2$, demuestre que la función generadora de momento de X es $e^{-2t}M(t)$.

   Realice el ejercicio anterior con $Y \sim \text{Po}(\lambda = 2)$

4. Sea X variable aleatoria con valor esperado μ y varianza σ^2.

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

   A Y se le conoce como la estandarización de la variable aleatoria X. Muestre que Y tiene media 0 y varianza 1.

5. Demuestre o proporcione un contraejemplo

   a) Si $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ entonces $X = Y$.
   b) $\mathbb{E}(1/X) = 1/\mathbb{E}(X)$.
   c) Si $\mathbb{E}(X) = 0$ entonces $X = 0$.
   d) $\mathbb{E}(X^2) = E^2(X)$.

6. Sea X una variable aleatoria discreta tal que $Var(X) = 0$. Demuestre que X es la variable aleatoria constante.

7. La función de densidad de una variable aleatoria continua está dada por

$$f(x) = (ax^2 + b)\mathbb{1}_{(0,2)}(x)$$

   Si se sabe que $\mathbb{P}(1/2 < X < 1) = 1/8$.

   a) Encuentre los valores de a y b para que f sea una función de densidad propia o legítima. Exprese sus resultados con al menos 4 dígitos.
   b) Determina la función de probabilidad acumulada $F(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$
   c) Suponga que X representa la velocidad de cierta partícula medida en metros/segundos.¿Cuál es la velocidad esperada de la partícula si se sabe que se encuentra precisamente entre 0.5 y 1 m/s?

13. Desigualdades importantes

1. Pruebe las siguientes desigualdades:

   a) **Desigualdad de Markov:** Pruebe que si X es una variable aleatoria no negativa (i.e. $X \geq 0$) tal que $\mathbb{E}[|X|] < \infty$. Entonces, para toda $\varepsilon > 0$ se cumple que

   $$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}$$

   b) Sea X variable aleatoria arbitraria con $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, entonces para toda $\varepsilon > 0$

   $$\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{\varepsilon}$$

   c) Sea X variable aleatoria arbitraria con $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$ para cierta $n \in \mathbb{N}$, entonces para toda $\varepsilon > 0$

   $$\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^n)}{\varepsilon^n}$$

2. **Desigualdad de Chebyshev:** Demuestre que si X es variable aleatoria arbitraria entonces para toda $\varepsilon > 0$ se cumple que

   $$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

3. **Desigualdad de Chebyshev extendida:** Sea X variable aleatoria cualquiera y sea $g \geq 0$ una función no decreciente tal que $\mathbb{E}[g(X)] < \infty$. Entonces, para toda $\varepsilon > 0$ se tiene que

   $$\mathbb{P}(X \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{g(\varepsilon)}$$

4. Sea X variable aleatoria con desviación estándar σ, demuestra

   $$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

5. La casa de monedas produce monedas de 10 centavos con un promedio de 0.5 pulgadas y desviación estándar de 0.01 pulgadas. Con la desigualdad de Chebyshev encuentre una cota inferior para el número de monedas de un lote de 400 monedas, que se espera que tengan un diámetro entre 0.48 y 0.52 pulgadas.

6. Si el promedio de un grupo de Cálculo de Probabilidades I fue 62 sobre 100, obtenga lo que se pide:

   a) Estime la probabilidad de que un estudiante obtenga más de 85.

   b) Estime la misma probabilidad, sabiendo que la desviación estándar es 15.

7. Sea Y variable aleatoria tal que $\mu = 11$ y $\sigma^2 = 9$.

   a) Aproxime $\mathbb{P}(6 < Y < 16)$.

   b) Encuentre c tal que $\mathbb{P}(|Y - \mu| > c) = 0.09$.

8. La variable aleatoria X tiene función generadora de momentos

   $$m_X(t) = (1 - 2t)^{-1}$$

   Encuentra una cota inferior para $\mathbb{P}[|X - 2| \leq 3]$.

9. Pruebe que si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función no decreciente y convexa y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es convexa, entonces $h(g(x))$ es una función convexa.

10. **Desigualdad de Jensen:** Sea X una variable aleatoria y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa sobre el soporte de X. Suponga que $\mathbb{E}[g(X)]$ y $g(\mathbb{E}[X])$ son finitas. Pruebe que

$$g(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[g(X)]$$

11. ¿Cómo quedaría la desigualdad anterior si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función cóncava? Justifique su respuesta.

12. Sea X variable aleatoria no negaiva donde $\mathbb{E}(X) = 10$. ¿Qué puede concluir de las siguientes cantidades?

    a) $\mathbb{E}[\frac{1}{X+1}]$.

    b) $\mathbb{E}[e^{\frac{1}{X+1}}]$.

    c) $\mathbb{E}[\ln(\sqrt{X})]$.

13. Se desea conocer el número de automóviles que se deben poner a la venta durante un periodo determinado para que se satisfaga una demanda media de 300 unidades con una desviación típica de 100 unidades con una probabilidad no inferior al 75 %. Estime la cantidad de automóviles.

14. La demanda media de un producto es de 100 unidades con una desviación típica de 40 unidades. Calcule la cantidad del producto que se debe tener a la venta para satisfacer la demanda de forma que puedan ser atendidos al menos el 80 %.

15. En un cine de verano hay instalados 800 sillas, sabiendo que el número de asistentes sigue una variable aleatoria de media 600 y desviación típica de 100. ¿Qué probabilidad existe de que el número de personas que vaya al cine un día cualquiera sea superior al número de sillas instaladas?

16. Para cierto tipo de suelo, el número de lombrices por pie cúbico tiene una media de 100. Suponiendo una distribución de Poisson de las lombrices, proponga un intervalo que incluirá al menos 5/9 de los valores muestrales de las cantidades de lombrices obtenida de un número grande de muestras de 1 pie cúbico.

14. Distribuciones discretas importantes

1. Sea X variable aleatoria con distribución Poisson(λ) tal que $\lambda \in (0, 1)$. Demuestre que

$$\mathbb{E}(X!) = \frac{1}{1-\lambda} e^{-\lambda}.$$

2. Demuestre que si $X \sim \text{Bin}(n, p)$ entonces se tiene la siguiente fórmula recurrente:

$$\mathbb{P}(X = x + 1) = \frac{(n-x)p}{(x+1)(1-p)} \mathbb{P}(X = x)$$

3. Suponga que $\mathbb{P}(X = a) = p$ y que $\mathbb{P}(X = b) = 1 - p$.

a) Muestre que $\frac{X-b}{a-b}$ es una variable aleatoria Bernoulli.

b) Calcule $Var(X)$.

4. Compruebe que la distribución hipergeométrica con parámetros N, K, n se reduce a la distribución Bernoulli con parámetro $p = K/N$ cuando $n = 1$.

5. Sea $X \sim \text{Bin}(4, p)$. Encuentre $\mathbb{E}(\cos(\frac{\pi X}{2}))$.

6. La variable aleatoria Y tiene una distribución de Poisson y es tal que $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1)$. ¿Cuál es $\mathbb{P}(X = 2)$?.

7. Sea $X \sim \text{Ber}(p)$ con función de densidad $f_X(x)$ y $m_X(t)$ su respectiva función generadora de momentos. Sea g una nuva densidad definida como

$$g_X(x) = \frac{e^{tx} f_X(x)}{m_X(t)}$$

a) Demuestre que g sigue una distribuión Bernoulli y determine sus parámetros.

b) Demuestre que g definida de esta manera siempre es una función de densidad de probabilidades para cualquier f.d.p. $f_X(x)$.

8. Sea $X \sim \text{Bin}(n, p)$. Utilice la desigualdad de Chebyshev para mostrar que para $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\left|\frac{X}{n} - p\right| > \varepsilon\right] = 0$$

Interprete el resultado obtenido.

9. Se pone a la venta un lote de 100 artículos de los cuales 10 son defectuosos. Un comprador extrae una muestra al azar de 5 artículos y decide que si encuentra 2 o más defectuosos, entonces no compra el lote. Calcule la probabilidad de que la compra se efectúe.

10. En un libro muy voluminoso, el número de errores por página se modela mediante una variable aleatoria con distribución Poisson con media uno. Encuentre la probabilidad de que una página seleccionada al azar contenga

a) ningún error.

b) exactamente dos errores.

c) al menos tres errores.

11. En una pequeña aseguradora de autos se tienen a 220 asegurados, la probabilidad de que un asegurado tenga un accidente en el año es 0.05. Determine la probailbidad de que se presenten más de 5 reclamaciones, dado que la compañía en este año tiene al menos dos reclamaciones. Hacerlo de manera exacta (con uso de la Binomial), así como con su aproximación Poisson.

12. En la producción diaria de cierta clase de cuerda, el número de defectos por pie Y se supone que tiene una distribución de Poisson con media $\lambda = 2$. La utilidad por pie cuando se venda la cuerda está dada por X, donde $X = 50 - 2Y - Y^2$. Encuentre la utilidad esperada por pie.

13. Una empresa quiere saber cómo compran sus productos en una tienda de electrónicos. Decide enviar a un empleado a entrevistar, en promedio, a 15 visitantes de la tienda de electrónicos. El entrevistador preguntará a los visitantes hasta que encuentre a la cuarta persona en comprar un producto de su empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que la décima persona que entreviste sea la segunda en comprar el producto?

14. En una tienda departamental, el número de clientes que entran por hora es modelado por una distribución Poisson con media 3.8.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que en una hora entren más de dos clientes?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que no entre nadie en media hora?

    c) ¿Cómo se distribuye X_t que modela el número de personas que entran en las primeras t horas? ($t > 0$)

    d) Sea T la variable aleatoria medida en horas en la que llega la primera persona. Encuentra $F_T(t)$ para $t > 0$, $f_T(t)$ y $\mathbb{E}(T)$.

15. Distribuciones continuas importantes

1. Sea X variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $(0, 1)$. Encuentre la función de densidad de $Y = X^{1/\beta}$, donde $\beta \neq 0$

2. Sea $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$. Verifique que

    a) $\mathbb{E}(X) = \mu$

    b) $\mathbb{E}(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$

    c) $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

3. Sea X con distribución Weibull(α, λ). La correspondiente función de densidad es,

$$f(x) = \lambda\alpha(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-(\lambda x)^\alpha} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x).$$

    Verifique que su función de probabilidad acumulada esta dada por

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(\lambda x)^\alpha} & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

4. Sea X una variable aleatoria con distribución χ^2_n y sea $c > 0$ una constante. Defina el parámetro de forma $\alpha = n/2$ y el parámetro de tasa $\lambda = 1/(2c)$. Demuestre que

$$cX \sim \mathrm{Ga}(\alpha, \lambda)$$

5. El tiempo medido en horas para reparar una máquina es una variable aleatoria exponencial de parámetro $\lambda = 1/2$. ¿Cuál es la probabilidad de que un tiempo de reparación

    a) exceda 2 horas?

    b) tome a lo sumo 4 horas?

    c) tome a lo sumo 4 horas dado que no se ha logrado la reparación en las primeras 2 horas?

6. Suponga que el tiempo promedio que le toma a una persona cualquiera terminar un cierto examen de inglés es de 30 minutos, con una desviación estándar de 5 minutos. Suponiendo una distribución aproximada normal con estos parámetros, determine el tiempo que debe asignarse para que el 95 % de las personas puedan terminar el examen.

7. El valor, v de un bien se calcula a partir del tiempo en años desde su compra, t, como sigue: $v(t) = e^{7-0.2t}$. Si el bien falla durante los primeros 7 años de su compra, la grantía paga al sueño el valor de v, pero si falla después de los 7 años, no paga nada. El tiempo de falla para este bien supone una distribución exponencial con media 10. Calcule el pago esperado de la garantía.

8. Las variables aleatorias X y Y siguen una distribución Normal con la misma media. La varianza de Y es 2.25 veces la varianza de X. El percentil 14 % de X es el mismo que el percentil p % de Y. Calcule el valor de p.

9. Si $Y \sim Gamma(\alpha, \beta)$ donde $\mathbb{E}(Y) = \alpha\beta$

   a) Demuestra que para $a \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha + a > 0$ entonces

   $$\mathbb{E}(Y^a) = \frac{\beta^\alpha \Gamma(\alpha + a)}{\alpha}$$

   b) ¿Por qué es necesario que $\alpha + a > 0$?

   c) Si $a = 1$, ¿cuánto vale $\mathbb{E}(Y)$?

   d) Calcula $\mathbb{E}(\sqrt{Y})$

   e) Calcula $\mathbb{E}(Y^{-1})$, $\mathbb{E}(Y^{-1/2})$ y $\mathbb{E}(Y^{-2})$ junto con los supuestos necesarios de para α usando el primer inciso.

10. Supongamos que X modela el tiempo que tarda un relojero en componer un reloj, en horas, con media de 3.

    a) Si quiere dar una garantía del tiempo de compostura por reloj con confianza del 95 %, ¿cuántas horas debe prometer de espera?

    b) El relojero cobra \$500 por hora o fracción de hora trabajada. ¿Cuánto cobra en promedio por servicio? **Sugerencia:** Discretiza la variable aleatoria.

11. Sea X la variable aleatoria con función de densidad uniforme continua en el intervalo $[0, 5]$. ¿Cuál es la probabilidad de que las raíces de z de la ecuación $4z^2 + 4zX + X + 2 = 0$ sean ambas reales?

Respuestas

1. Introducción

1:1. —

1:2. —

1:3. —

1:4. —

1:5. —

1:6. —

1:7. —

1:8. —

1:9. —

1:10. —

2. Espacios de probabilidad

2:1. $p = 5/8$

2:2. $p = 18/37$

2:3. $p = 4/5$

2:4. —

2:5. —

2:6. —

2:7. —

2:8. *a*) $p = 5/36$
b) $p = 15/36$
c) $p = 11/36$

2:9. *a*) $p = 1/3$
b) No.
c) $p = 1/6$
d) $p = 7/12$

2:10. Sea p_0 la probabilidad de que ocurran cero sismos en un año, entonces $p = 1 - \frac{4}{3}p_0$

2:11. —

2:12. *a*) 32

b) 8

2:13. *a*) $p = 49/100$
b) $p = 35/100$
c) $p = 51/100$

2:14. Sea $d = (r + b)(r + b - 1)$

a) $p = r * (r - 1)/d$
b) $p = r * b/d$
c) $p = b * r/d$
d) $p = b * (b - 1)/d$

3. Técnicas de conteo

3:1. 175,760,000

3:2. 78,624,000

3:3. *a*) 120
b) 1,260
c) 34,650

3:4. 5,040

3:5. 14,400

3:6. 2,880

3:7. $1 - \frac{9!}{19!}$

3:8. Suponemos $m > n$,

a) n^m
b) $\frac{m!}{(m-n)!}$

3:9. *a*) 120
b) 20

3:10. *a*) 720
b) 72
c) 144

3:11. 600

3:12. 0.0825

3:13.

$$\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j}$$

3:14. 2^n

3:15. *a*) 1,317,888
b) 3,744
c) 624
d) 5,108

4. Independencia y probabilidad condicional

4:1. —

4:2. —

4:3. —

4:4. —

4:5. $p = 5/8$

4:6. *a*) $\mathbb{P}(\text{“A vence”}) = 5/9$
$\mathbb{P}(\text{“B vence”}) = 2/9$
$\mathbb{P}(\text{“C vence”}) = 2/9$

b) Ninguno es independiente.

4:7. *a*) $p = 0.8658$

b) $p = 0.9699$

4:8. *a*) $p = 2/5$

b) $p = 3/20$

4:9. $n = 2$

4:10. *a*) $p = 3/4$

b) $p = 3/4$

c) $p = 2/3$

4:11. *a*) 1/3

b) 1/5

4:12. 14 preguntas

5. Probabilidad total y teorema de Bayes

5:1. —

5:2. —

5:3. $p = 0.1638$

5:4. —

5:5. $p = 0.34$

5:6. Es más probable que sea defectuoso bajo el plan 3.

5:7. 0.4

5:8. Celador tiene la razón.

5:9. *a*) Como solo hay dos cajas con monedas de oro, la probabilidad de elegir cualquiera de ellas es 1/2

b) —

5:10. *a*) —

b) $p = \frac{r+k}{r+b+k}$

5:11. .0245

6. Variables aleatorias

6:1. Las variables aleatorias constantes.

6:2. —

6:3. —

6:4. —

6:5. —

6:6. *a)* $A = 0.05$.
b) $\theta = 0.05$
c) $p = 0.3773$

6:7. *a)* $S_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$\mathbb{P}(X = k) = \frac{2k-1}{36}$, con $k \in S_X$
b) $S_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$\mathbb{P}(X = k) = \frac{13-2k}{36}$, con $k \in S_X$
c) $S_X = \{2, 3, 4, ..., 11, 12\}$
$\mathbb{P}(X = k) = \frac{x-1}{36}\mathbb{1}_{\{2,...,7\}}(k) + \frac{13-x}{36}\mathbb{1}_{\{8,...,12\}}(k)$

6:8. *a)* $\mathbb{P}(X = k) = \frac{2k-1}{144}\mathbb{1}_{\{1,2,...,12\}}(k)$
b) $\mathbb{P}(X = k) = \frac{2(k-1)}{132}\mathbb{1}_{\{2,3,...,12\}}(k)$

6:9. *a)* $\{-n, 2-n, 4-n, 6-n, ..., n-6, n-4, n-2, n\}$
b) $\mathbb{P}(X = k) = \frac{3}{8}\mathbb{1}_{\{-1,1\}} + \frac{1}{8}\mathbb{1}_{\{3,-3\}}$

6:10. $\mathbb{P}(X = k) = \frac{2k-1}{n^2}$

6:11. $\mathbb{P}(x = k) = \frac{1}{10}\mathbb{1}_{\{0,1,...,9\}}$

6:12. —

6:13. $X \in \{-2.5, -1.5, ..., 7.5\}$

6:14. *a)* $\frac{1}{2}^1 8$
b) $\frac{1}{2}^9$

7. Cálculo de probabilidades con variables aleatorias

7:1. Sea $1/k = \binom{r}{n}$

a) $F(y) = k\sum_{k=n}^{y}\binom{k-1}{n-1}$

b) $F(z) = 1 - k\sum_{k=1}^{z-1}\binom{r-k}{n}$

7:2. *a)* —
b) $f(x) = \frac{1}{8}\mathbb{1}_{\{0,3\}}(x) + \frac{3}{8}\mathbb{1}_{\{2,3\}}(x)$.
c) —

7:3. *a*) $\mathbb{P}(X \le k) = \frac{k^2}{36}$

b) $\mathbb{P}(Y \le k) = \frac{12k-k^2}{36}$

c) $\mathbb{P}(Z \le z) = \begin{cases} \frac{z^2-z}{72} & 2 \le x \le 7 \\ \frac{84+25z-z^2}{72} & 7 < x \le 12 \end{cases}$

7:4. *a*) —

b) $p = \frac{3}{5}$.

7:5. $F(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{-2x}$, $x > 0$.

7:6. *a*) $k = \frac{1}{16}$.

b) $p = 0.3573$.

c) $F(x) = 1 - \frac{5}{4}e^{-\frac{x}{4}}$

d) $p = 0.99$

7:7. *a*) $c = e^{-\lambda}$

b) $p = e^{-\lambda}$

c) $1 - \left(e^{-\lambda} + \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}\right)$

7:8. *a*) $\theta = 4$

b) $a = 3/8$ y $b = 5/8$

7:9. *a*) $p = 1/8$

b) $p = 1/2$

c) $p = 1/n^3$

d) $p = 7/8$

7:10. *a*) Continua, $f(x) = 1\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

b) Continua, $f(x) = e^{-x}$

c) Discreta, $f(x) = \frac{1}{5}\mathbb{1}_{\{x=0\}}(x) + \frac{2}{5}\mathbb{1}_{(x\in\{1,2)}(x)$

7:11. *a*) $p = \frac{7}{16}$

b) —

7:12. *a*) $F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } 0 < x < c \\ 1 & \text{si } x > c \end{cases}$

b) $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} x \le c \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > c \end{cases}$

8. Función de riesgo y de supervivencia

8:1. *a*) $\mathbb{P}(X = x) = \binom{4}{x}(0.4)^x(0.6)^{4-x}\mathbb{1}_{x\in\{0,1,2,3,4\}}(x)$

b) $F_X(x) = \sum_{k=0}^{x}\binom{4}{x}(0.4)^x(0.6)^{4-x}$

8:2. —

8:3. a) $F_X(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right\}$

b) $f_X(x) = \beta\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right\}$

c) $p = 0.169$

d) —

8:4. $f_X(x) = 0.5x^{-0.5}\exp\{-x^{0.5}\}$

8:5. a) —

b) —

c) $S_X(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ (1-p)^{\lfloor x \rfloor + 1} & x \geq 0 \end{cases}$

d) $h_X(x) = \frac{p}{1-p}$

e) —

8:6. a) $f(x) = 2e^{-2x}$

b) $S_X(x) = e^{-2x}$

c) $h_X(x) = 2$

8:7. a) $f_X(x) = ce^{-cx}$

b) $h_X(x) = c$

c) $p = e^{-8c}$

8:8. a) —

b) $S_X(x) = \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\theta \mathbb{1}_{[\alpha,\infty)}(x) + 1\mathbb{1}_{(-\infty,\alpha)}(x)$

c) $h_X(x) = \frac{\theta}{x}$

d) $\theta = 2.3219$

8:9. —

8:10. —

9. Información obtenida de las variables aleatorias

9:1. —

9:2. a)
- cuantil 70 %: $x = 0$.
- cuantil 80 %: no existe.
- cuantil 90 %: $x = 1$.

b) no existen los cuantiles que se piden.

9:3. a)
- primer cuartil: $x = 0.25$.
- segundo cuartil: $x = 0.5$.
- tercer cuartil: $x = 0.75$.

b)
- primer cuartil: $x \approx 0.7227$.
- segundo cuartil: $x = \frac{\pi}{3}$.
- tercer cuartil: $x \approx 1.3181$.

9:4. a)
- Si $p > 1/2$ moda es $x = 1$.

- Si $p < 1/2$ moda es $x = 0$.
- Si $p = 1/2$ tiene dos moda, $x = 0$ y $x = 1$.

b) moda $x = 1$.

9:5. *a*) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathbb{P}(A) & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) —

9:6. *a*) $\mathbb{E}(Y) = 0$.

b) $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < -1 \\ \frac{2}{pi}(\tan^{-1}(y) + \frac{\pi}{4} & \text{si } -1 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$

c) cuantil 50: $x = 0$.

9:7. $\mathbb{E}(g(X)) = 67.36$.

9:8. *a*) $c = \frac{1}{5}$.

b)
- primer cuartil: $x = 0.75$.
- segundo cuartil: $x \approx 1.4384$.
- tercer cuartil: $x \approx 6.9314$.

9:9. $c = \frac{1-p}{p}$.

9:10. —

9:11. —

9:12. *a*) $\mathbb{E}(X) = 0.5$.

b) $\mathbb{E}(X) = 1$.

10. Momentos y función generadora de momentos

10:1. $\mathbb{E}(X) = 1/4$

10:2. $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$

10:3. $\mathbb{E}(Y) = np$

10:4. $\mathbb{E}(U) = \frac{a+b}{2}$

10:5. $\mathbb{E}(Z) = 1/p$

10:6. *a*) $\mathbb{E}(X) = 0$ y $Var(X) = 1/18$

b) $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ y $Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$

10:7. $\mathbb{E}(X^n) = \frac{6}{n+2} - \frac{6}{n+3}$

10:8. —

10:9. *a*) $\sigma^2 + \mu^2 - 2c\mu + c^2$

b) Es mínimo para $c = \mu$

10:10. —

10:11. $\nu_3 = 0$ y $\nu_4 = 1.8$. Por tanto, es simétrica, y platicúrtica.

10:12. *a*) moda $= 2/3$.
b) $\mathbb{E}(Y) = 3/5$.
c) $\text{var}(Y) = 1/25$.
d) $\sigma = 1/5$.
e) $\text{CV}(Y) = 1/3$.
f) $\text{Sesgo}(Y) = -2/7$.
g) $K(Y) = 2.3571$.

11. Función generadora de momentos

11:1. $m_X(t) = \frac{e^t}{2-e^t}$, y $\mathbb{E}(X) = 2$ y $\text{Var}(X) = 2$.

11:2. —

11:3. —

11:4. —

11:5. *a*) Su distribución es binomial, con $n = 8$ y $p = 0.2$.
b) $\mathbb{P}(X > 0) = 0.8322$ y $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 4) = 0.8218$.
c) $\mathbb{E}(X) = 1.6$ y $\text{Var}(X) = 1.28$.

11:6. *a*) $\text{CV}(X) = 0.5$
b) $\text{Sesgo}(X) = 1$
c) $\text{K}(X) = 4.5$

11:7. *a*) $m_T(w) = \frac{1}{1-4w}$ para $w < 1/4$
b) $\mathbb{E}(T) = 4$
$\text{Var}(T) = 16$
c) $\text{Sesgo}(T) = 2$
$\text{K}(T) = 9$

11:8. —

11:9. $M_Y = e^{bt} M_X(at)$ con $|t| \leq c/a$

11:10. —

11:11. —

11:12. $\mathbb{E}[g(X)] = 152.64$

12. Repaso variables aleatorias

12:1. —

12:2. *a*) $c = 4$
b) $\mathbb{E}(Y) = 1$
$\text{Var}(Y) = 1/2$
c) $M_Y(t) = \frac{4}{(t-2)^2}$ para $t < 2$

d) —

12:3. *a*) $M(0) = 1$

b) —

c) —

12:4. —

12:5. —

12:6. —

12:7. *a*) $a = 1/3$, $b = 1/8$

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^3}{9} + \frac{x}{18} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

c) $\mathbb{E}\left[X|1/2 < X < 1\right] = 19/24$

13. Desigualdades importantes

13:1. —

13:2. —

13:3. —

13:4. —

13:5. 399

13:6. *a*) $p \leq 0.7294$

b) -

13:7. *a*) $p \leq 0.64$

b) -

13:8. —

13:9. —

13:10. —

13:11. —

13:12. *a*) $\mathbb{E}[\frac{1}{X+1}] \geq \frac{1}{11}$.

b) $\mathbb{E}[e^{\frac{1}{X+1}}] \geq e^{\frac{1}{11}}$.

c) $\mathbb{E}[\ln(\sqrt{X})] \leq \ln(\sqrt{10})$.

13:13. Se deben poner a la venta 500 automóviles.

13:14. Se deben producir 189 unidades.

13:15. Menor a 1/4

13:16. $(85, 115)$

14. Distribuciones discretas importantes

14:1. —

14:2. —

14:3. *a*) —

b) $\text{Var}(X) = (a-b)^2 p(1-p)$

14:4. —

14:5. $\mathbb{E}\left[\cos\left(\frac{\pi X}{2}\right)\right] = -\left(4p^4 - 8p^3 + 4p - 1\right)$

14:6. $\mathbb{P}(X = 2) \approx 0.1839$

14:7. *a*) —

b) —

14:8. —

14:9. $\mathbb{P}(X \leq 1) \approx 0.9231$

14:10. *a*) $\mathbb{P}(X = 0) \approx 0.3678$.

b) $\mathbb{P}(X = 2) \approx 0.1839$.

c) $\mathbb{P}(X \geq 3) \approx 0.0805$.

14:11. $p = 0.96$

14:12. $\mathbb{E}(X) = 40$.

14:13. $p = 0.0601$

14:14. *a*) $\mathbb{P}(X > 2) \approx 0.7311$

b) $\mathbb{P}(X = 0) \approx 0.0223$

c) —

d) —

15. Distribuciones continuas importantes

15:1. $f_Y(y) = |\beta| y^{\beta - 1} \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$

15:2. —

15:3. —

15:4. —

15:5. *a*) $p \approx 0.3678$

b) $p \approx 0.8646$

c) $p \approx 0.6321$

15:6. Deben asignarse 38.25 minutos.

15:7. El pago esperado es aproximadamente 320.78.

15:8. $p = 0.2358$

15:9. *a*) —

b) Para que la integral de $\mathbb{E}(Y^a)$ converja.

c)

$$\mathbb{E}\left[\sqrt{Y}\right] = \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\beta^{1/2}}{\Gamma(\alpha)}$$

d) Con $\alpha > 1$

$$\mathbb{E}\left[Y^{-1}\right] = \frac{\Gamma\left(\alpha - 1\right)}{\Gamma(\alpha)\beta}$$

Con $\alpha > 1/2$

$$\mathbb{E}\left[Y^{-1/2}\right] = \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)\beta^{1/2}}$$

Con $\alpha > 2$

$$\mathbb{E}\left[Y^{-2}\right] = \frac{\Gamma\left(\alpha + 2\right)}{\Gamma(\alpha)\beta^{2}}$$

15:10. *a*) Debe prometer 8.98 horas de espera.

b) En promedio cobra $1763.9 por servicio.

15:11. $p = 3/5$