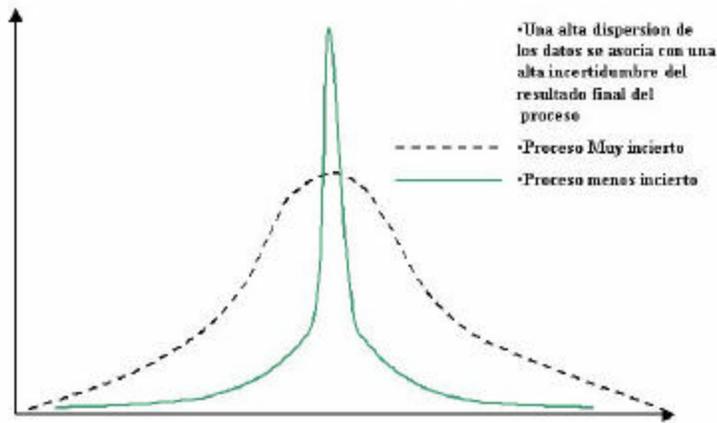


## Maxima Entropia y la Incertidumbre Asociada a un Proceso

La entropia de una distribucion de probabilidad es una medida de la incertidumbre asociada al proceso aleatorio que tal distribucion modela. El principio es muy sencillo. Si bien un proceso sujeto a incertidumbre carece de predictibilidad, existen procesos mas inciertos que otros:

Por ejemplo un proceso aleatorio con una distribucion de probabilidad muy concentrada alrededor de su media podria considerarse como menos incierto en comparacion con un proceso con alta dispersion

### Comparacion de un proceso muy "incierto" vs uno menos "incierto"



En particular, dada cualquier medida de probabilidad, su entropia se define como el valor esperado del logaritmo de la probabilidad multiplicado por menos uno:

$$E_p = -E(\log(p(x)))$$

en el caso de una distribucion discreta con soporte en  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$E_p = -\sum_{i=1}^n p(x_i) \log(p(x_i))$$

y para una distribucion continua

$$E_p = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \log(p(x)) dx$$

para adquirir intuicion acerca del significado de esta medida de incertidumbre veamos que pasa en el caso del modelo binomial donde una variable aleatoria puede tomar los valores:

$$X = \begin{cases} x_1 & \text{con probabilidad } p \\ x_2 & \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases}$$

La entropia de esta distribucion esta dada por

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^2 p(x_i) \log(p(x_i)) &= -p \log(p) - (1-p) \log(1-p) \\ &= p[\log(1-p) - \log(p)] - \log(1-p) \end{aligned}$$

Los valores de  $p$  para los cuales la entropia toma sus valores extremos satisfacen condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} (p[\log(1-p) - \log(p)] - \log(1-p)) &= [\log(1-p) - \log(p)] + p \left[ \frac{-1}{1-p} - \frac{1}{p} \right] + \frac{1}{1-p} \\ &= [\log(1-p) - \log(p)] + \frac{1-p}{1-p} - 1 \\ &= [\log(1-p) - \log(p)] = 0 \end{aligned}$$

Es decir la primera derivada se anula cuando

$$\log(1-p) = \log(p)$$

es decir

$$1-p = p$$

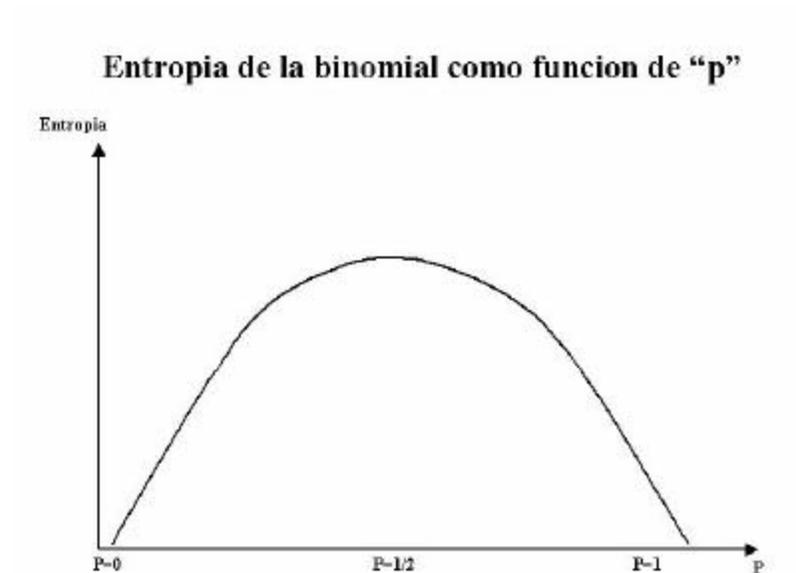
es decir cuando

$$p = 1/2$$

Así, los puntos extremos de la función de entropía son

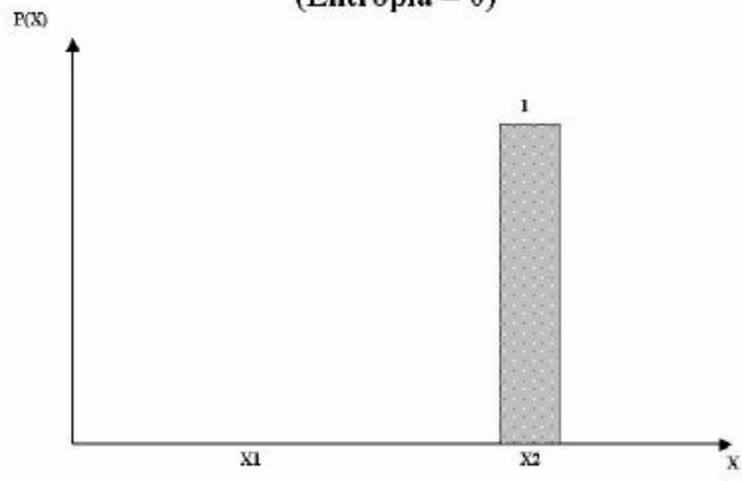
$$[0, 1/2, 1]$$

La gráfica de la función de entropía está dada por:

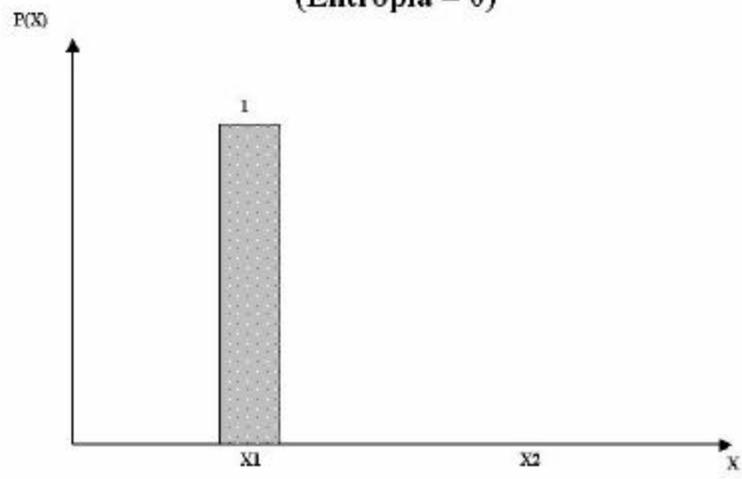


Así pues la entropía es mínima cuando  $p = 0$  o bien  $p = 1$ . Estos puntos extremos se asocian a una certeza total acerca del proceso. Mientras que la entropía se maximiza cuando  $p = 1/2$  este punto se asocia a una incertidumbre total acerca del proceso. No tenemos razón alguna para decir que  $x_1$  es más probable que  $x_2$  y viceversa.

**Entropia minima cuando  $p=0$**   
**(Entropia = 0)**



**Entropia minima cuando  $p=1$**   
**(Entropia = 0)**



**Entropia maxima cuando  $p=1/2$**   
**(Entropia =  $-\log(1/2)$ )**

