MÓDULO 3:

ESTADÍSTICA BAYESIANA

PROFESOR: LUIS E. NIETO BARAJAS

EMAIL: lnieto@itam.mx

URL: http://allman.rhon.itam.mx/~lnieto

Diplomado en Estadística Aplicada

Módulo 3: Estadística Bayesiana

- OBJETIVO: Presentar los fundamentos del enfoque Bayesiano de la estadística. En particular los problemas de inferencia se plantean como problemas de decisión. Se introduce la noción de probabilidad subjetiva y se establece el principio de utilidad esperada máxima.

- PLAN DE ESTUDIOS:

  1. Introducción.

  2. Estructura de un problema de decisión.

  3. Tratamiento axiomático del problema de decisión.

  4. Principio de utilidad esperada máxima.

  5. Información inicial.

  6. Teorema de Bayes.

  7. Procesos de inferencia como problemas de decisión.

  Estimación Bayesiana puntual y por regiones.

  Contraste Bayesiano de hipótesis.

- REFERENCIA BÁSICA:

✓ Bernardo, J. M. (1981). *Bioestadística, una perspectiva Bayesiana*. Vincens-vives: Barcelona.

- REFERENCIAS ADICIONALES:

- Antelman, G. (1997). *Elementary Bayesian Statistics*. Edited by A. Madansky & R. McCulloch. Edward Elgar Publishing Ltd: Cheltenham
- Bernardo, J. M. & Smith, A. F. M. (2000). *Bayesian Theory.* 2ª edición. Wiley: Chichester.
- Lee, P. M. (1997). *Bayesian Statistics (An introduction).* Arnold: London.
- Mendoza, M. (1996). *Teoría de decisiones y Estadística*. ITAM: México.

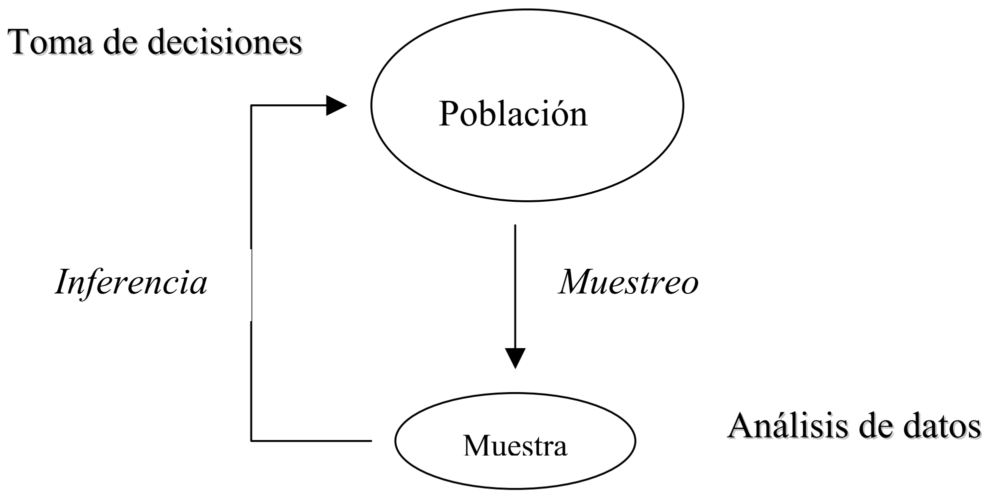
- PAQUETES ESTADÍSTICOS: Durante el curso se usarán varios paquetes estadísticos, los cuales servirán principalmente como herramienta didáctica. Algunos paquetes a utilizar son:
  1) First Bayes (http://www.shef.ac.uk/~st1ao/1b.html)
  2) WinBUGS (http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/)
  3) Minitab
  4) Splus
  5) R (http://www.r-project.org/)

- EVALUACIÓN: El alumno presentará una tarea-examen al final del curso sobre los conceptos básicos de la Estadística Bayesiana.

1. Introducción

- El OBJETIVO de la estadística, y en particular de la estadística Bayesiana, es proporcionar una metodología para analizar adecuadamente la información con la que se cuenta (*análisis de datos*) y decidir de manera razonable sobre la mejor forma de actuar (*teoría de decisión*).

- DIAGRAMA de la Estadística:



- Tipos de INFERENCIA:

	Clásica	**Bayesiana**
Paramétrica	Módulo 1	Módulo 3
No paramétrica	Módulo 4	¿?

- La TOMA DE DECISIONES es un aspecto primordial en la vida de un profesionista, por ejemplo, un médico debe de tomar decisiones constantemente en un ambiente de incertidumbre; decisiones sobre el diagnóstico más verosímil, la oportunidad de una intervención quirúrgica, el tratamiento más adecuado o la eficacia de un programa de inmunización.

- La METODOLOGÍA ESTADÍSTICA CLÁSICA se puede ver como un conjunto de *recetas* que resultan apropiadas en determinados casos y bajo ciertas condiciones.

- Sin embargo, existe una METODOLOGÍA UNIFICADA Y GENERAL que se deriva de analizar el proceso lógico que debe de seguirse para tomar una decisión (Teoría de decisión), y que incluye como caso particular al conjunto de recetas clásicas.

- La estadística esta basada en la TEORÍA DE PROBABILIDADES. Formalmente la probabilidad es una función que cumple con ciertas condiciones, pero en general puede entenderse como una medida o cuantificación de la incertidumbre.

- Aunque la definición de función de probabilidad es una, existen varias INTERPRETACIONES DE LA PROBABILIDAD:

- CLÁSICA: Supone que el experimento aleatorio produce <u>resultados igualmente verosímiles</u> (posibles) y propone como medida de probabilidad el cociente entre los casos favorables y los casos totales,

$$P(A)=\frac{N_A}{N}$$

- FRECUENTISTA: Supone que un experimento aleatorio puede ser repetido un número infinito de veces bajo condiciones similares y propone como medida de probabilidad la proporción de veces que ocurrió el evento de interés,

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}$$

- SUBJETIVA: Es simplemente una medida de la incertidumbre, asociada a un evento, asignada por un decisor. En otras palabras, es un juicio personal sobre la verosimilitud de que ocurra un resultado.

$$P(A) =$$ 

➢ La METODOLOGÍA BAYESIANA está basada en la interpretación subjetiva de la probabilidad y tiene como punto central el Teorema de Bayes.

Reverendo *Thomas Bayes* (1702-1761).

2. Estructura de un problema de decisión

- ¿Qué es un problema de decisión?. Nos enfrentamos a un problema de decisión cuando debemos elegir entre dos o más formas de actuar.

- La mayor parte de las decisiones cotidianas son triviales, como cuando elegimos una película en cartelera, o el platillo que comerán en un restaurante. Sin embargo, existen problemas de decisión en donde las consecuencias son importantes y exigen una seria reflexión, como la decisión de casarse o la de cambiar de trabajo.

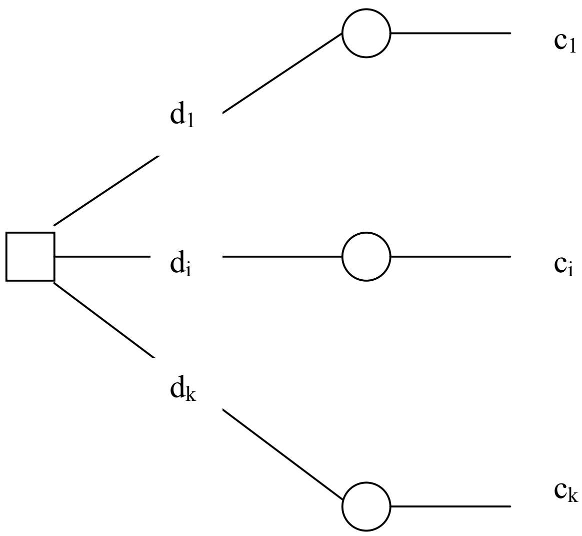
- La TEORÍA DE DECISIÓN propone un método de tomar decisiones basado en unos principios básicos sobre la *elección coherente* entre opciones alternativas.

- ELEMENTOS de un problema de decisión:

- ***D*** : Espacio de decisiones. Es el conjunto de posibles alternativas, debe de construirse de manera que sea *exhaustivo* (que agote todas las posibilidades que en principio parezcan razonables) y *excluyente* (que la elección de uno de los elementos de ***D*** excluya la elección de cualquier otro).
  $\boldsymbol{D} = \{d_1,d_2,\ldots,d_k\}$.
- ***C*** : Espacio de consecuencias. Es el conjunto de consecuencias posibles y describe las consecuencias de elegir una decisión.
  $\boldsymbol{C} = \{c_1,c_2,\ldots,c_k\}$.

- $\leq$: Relación de preferencia entre las distintas consecuencias. Se define de manera que $c_1 \leq c_2$ si c_2 es preferido sobre c_1.

- ÁRBOL DE DECISIÓN (*Sin incertidumbre*): Es posible representar el problema de decisión mediante un árbol.



Árbol de decisión
(Sin incertidumbre):
A cada decisión le corresponde una consecuencia segura.

- EJEMPLO 1: Un estudiante de preparatoria quiere decidir qué carrera estudiar.

$\boldsymbol{D} = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$, donde d_1 = Arquitectura, d_2 = Ingeniería Industrial,
d_3 = Actuaría, d_4 = Matemáticas

$\boldsymbol{C} = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, donde c_1=\$20000, c_2=\$25000, c_3=\$30000, c_4=\$15000

$\leq = \{3^o, 2^o, 1^o, 4^o\}$ Orden de preferencia.

- El OBJETIVO de un problema de decisión es determinar ¡*la mejor*! decisión de un conjunto de alternativas. Para ello es necesario que el decisor sea capaz de *comparar* las consecuancias ($\leq$), ¿cuál prefiere, c_1 ó c_2?

- ¿Qué tan realista es el problema de decisión sin incertidumbre?
  Poco realista realmente.

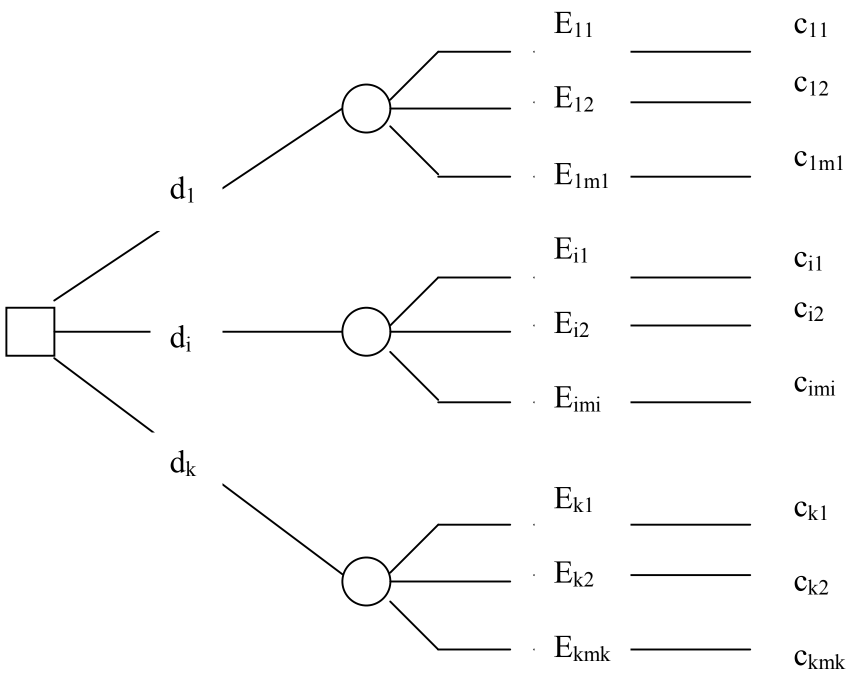
- En general, es poco común que se conozcan con certeza todas las posibles consecuencias de tomar una decisión, por lo que el problema general de decisión se plantea en *ambiente de incertidumbre*.

- Elementos EXTRA de un problema de decisión:

- ***E*** : Espacio de eventos inciertos. Contiene los eventos inciertos relevantes al problema de decisión.
  $\boldsymbol{E}_i = \{E_{i1}, E_{i2}, \ldots, E_{im_i}\}$., i=1,2,…,k.

- ÁRBOL DE DECISIÓN (*en ambiente de incertidumbre*):

  No se tiene información completa sobre las consecuencias de tomar cierta decisión.



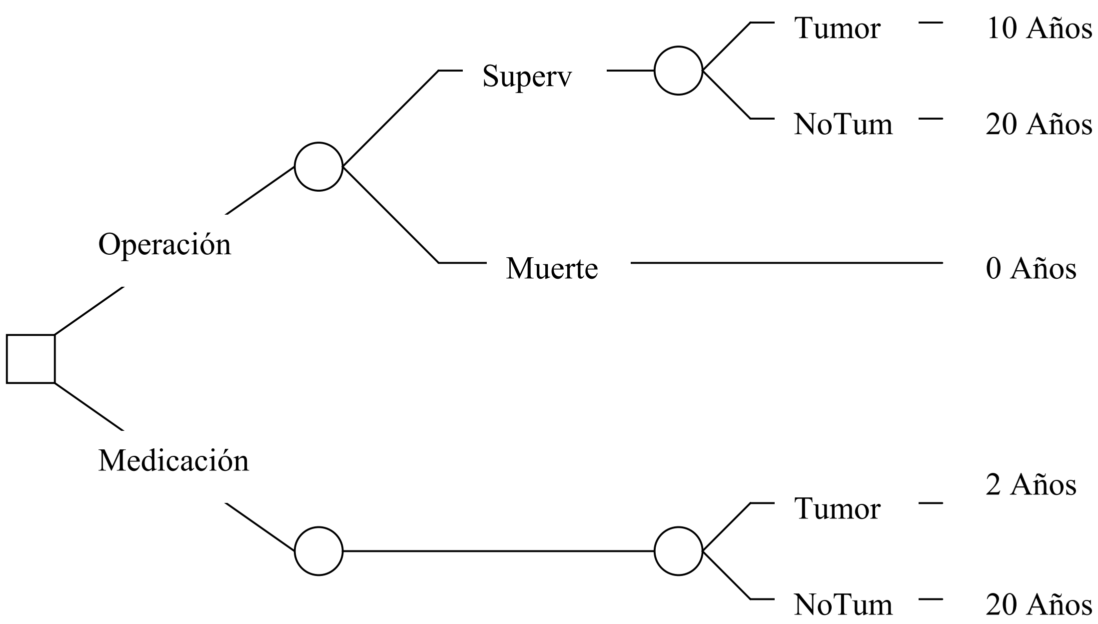
□ Nodo de decisión ○ Nodo aleatorio

- EJEMPLO 2: Un médico debe decidir si realizar una operación a una persona que se cree puede tener un tumor, o recurrir a una determinada medicación. Si el paciente no tiene un tumor su esperanza de vida se estima en 20 años. Si lo tiene, se opera y si sobrevive a la operación, le dan 10 años de vida, y si tiene el tumor y no se opera, sólo le dan 2 años de vida.

$\boldsymbol{D} = \{d_1, d_2\}$, donde d_1 = operar, d_2 = medicar

$\boldsymbol{E} = \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}\}$, donde E_{11} = supervivencia / tumor, E_{12} = supervivencia / no tumor, E_{13} = muerte, E_{21} = tumor, E_{22} = no tumor

$\boldsymbol{C} = \{c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{22}\}$, donde c_{11}=10, c_{12}=20, c_{13}=0, c_{21}=2, c_{22}=20



- En la práctica, la mayoría de los problemas de decisión tienen una estructura más compleja. Por ejemplo, decidir si realizar o no un experimento, y en caso afirmativo tratar de decidir la acción más adecuada según el resultado del experimento. (*Problemas secuenciales de decisión*).

- Frecuentemente, el conjunto de eventos inciertos es el mismo para cualquier decisión que se tome, es decir, $\boldsymbol{E}_i = \{E_{i1}, E_{i2}, \ldots, E_{im_i}\} = \{E_1, E_2, \ldots, E_m\} = \boldsymbol{E}$, para todo i. En este caso, el problema se puede representar como:

	E_1	...	E_j	...	E_m
d_1	c_{11}	...	c_{1j}	...	c_{1m}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
d_i	c_{i1}	...	c_{ij}	...	c_{im}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
d_k	c_{k1}	...	c_{kj}	...	c_{km}

- EJEMPLO 3: Se dispone de un automóvil y de una motocicleta para ir a resolver un asunto en el centro de la ciudad. La moto es más rápida, sobretodo si hay tráfico y puede estacionarse con facilidad, pero resulta incómoda si hace mal tiempo. El coche aunque es más cómodo consume más gasolina y hay que dejarlo en un estacionamiento a cierta distancia del lugar de destino. Suponemos que no hay transporte público disponible y el costo de un taxi es excesivo.

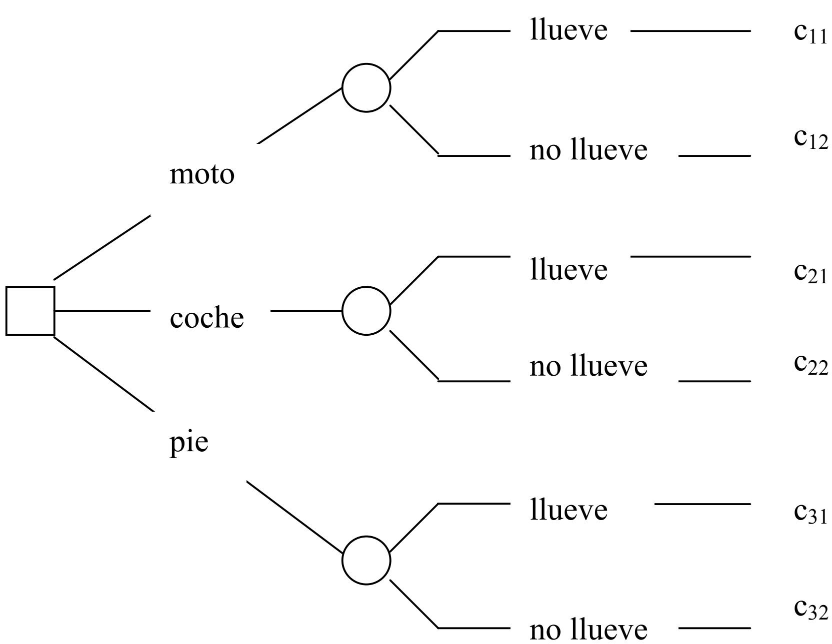
$\boldsymbol{D} = \{d_1, d_2, d_3\}$, donde d_1 = moto, d_2 = coche, d_3 = a pie

$\boldsymbol{E} = \{E_1, E_2\}$, donde E_1 = llueve, E_2 = no llueve. Se considera que los únicos eventos inciertos relevantes para el problema son estos.

$\boldsymbol{C} = \{c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}, c_{31}, c_{32}\}$, donde c_{ij} se describen el la siguiente tabla.

	E_1	E_2
d₁ 	c_{11}=Poco tiempo, trayecto incómodo, costo bajo.	c_{12}=Poco tiempo, trayecto agradable, costo bajo.
d₂ 	c_{21}=Algo de tiempo, manejo con lluvia, costo moderado.	c_{22}=Algo de tiempo, manejo sin lluvia, costo moderado.
d₃ 	c_{31}=Mucho tiempo, caminata con lluvia, sin costo.	c_{32}=Mucho tiempo, caminata sin lluvia, sin costo.

El mismo problema también puede ser representado mediante un árbol de decisión de la forma:



- El OBJETIVO de un problema de decisión en ambiente de incertidumbre consiste entonces en elegir ¡*la mejor*! decisión d_i del conjunto $\boldsymbol{D}$ sin saber cuál de los eventos E_{ij} de $\boldsymbol{E}_i$ ocurrirá.

- Aunque los sucesos que componen cada $\boldsymbol{E}_i$ son inciertos, en el sentido de que no sabemos cuál de ellos tendrá lugar, en general se tiene una idea sobre la verosimilitud de cada uno de ellos. Por ejemplo,

¿Cuál es más verosímil?

40 años

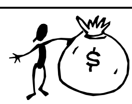
¿viva 10 más?

¿muera en 1 mes?

¿llegue a los 100?

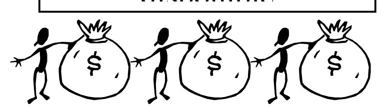
- Algunas veces resulta difícil ordenar nuestras preferencias sobre las distintas consecuencias posibles. Tal vez resulta más fácil asignar una utilidad a cada una de las consecuencias y ordenar posteriormente de acuerdo a la utilidad.

Ganar mucho dinero y tener poco tiempo disponible

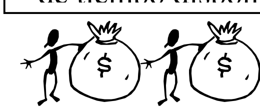


Consecuencias

Ganar poco dinero y tener mucho tiempo disponible



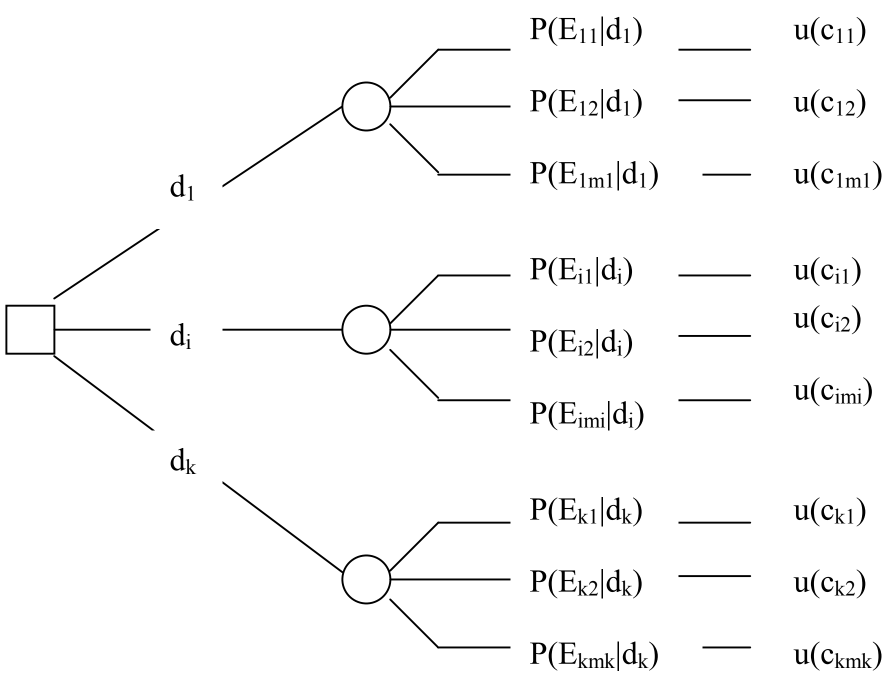
Ganar regular de dinero y tener regular de tiempo disponible



- CUANTIFICACIÓN de los sucesos inciertos y de las consecuencias.

- La información que el decisor tiene sobre la posible ocurrencia de los eventos inciertos puede ser cuantificada a través de una *función de probabilidad* sobre el espacio ***E***.
- De la misma manera, es posible cuantificar las preferencias del decisor entre las distintas consecuencias a través de una *función de utilidad* de manera que $c_{ij} \leq c_{i'j'} \Leftrightarrow u(c_{ij}) \leq u(c_{i'j'})$.

- Alternativamente, es posible representar el árbol de decisión de la siguiente manera:



- ¿CÓMO tomar ¡*la mejor*! decisión?

  Si de alguna manera fuéramos capaces de deshacernos de la incertidumbre podríamos ordenar nuestras preferencias de acuerdo con las utilidades de cada decisión. *La mejor* decisión sería la que tenga la utilidad máxima.

- ESTRATEGIAS: En un principio estudiaremos cuatro estrategias o criterios propuestos en la literatura para tomar una decisión.

  1) *Optimista* : Dar por "segura" a la mejor consecuencia de cada opción.
  2) *Pesimista* (o *minimax*): Dar por "segura" a la peor consecuencia de cada opción.
  3) *Consecuencia más probable* (o *condicional*): Dar por "segura" a la consecuencia más probable de cada opción.
  4) *Utilidad promedio* (o *utilidad esperada*): Dar por "segura" una consecuencia promedio para cada opción.

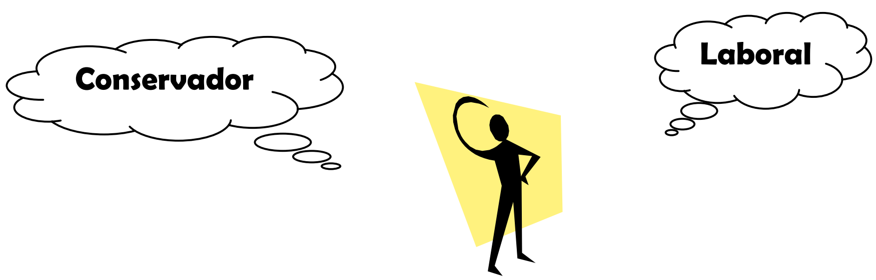
- Cualquiera que sea la estrategia tomada, *la mejor* opción es aquella que maximice la utilidad del árbol "sin incertidumbre".

- EJEMPLO 4: En unas elecciones parlamentarias en la Gran Bretaña competían los partidos Conservador y Laboral. Una casa de apuestas ofrecía las siguientes posibilidades:

  a) A quien apostara a favor del partido Conservador, la casa estaba dispuesta a pagar 7 libras por cada 4 que apostase si el resultado favorecía a los conservadores, en caso contrario el apostador perdía su apuesta.

  b) A quien apostase a favor del partido Laboral, la casa estaba dispuesta a pagar 5 libras por cada 4 que apostasen si ganaban los laboristas, en caso contrario el apostador perdía su apuesta.

¿A qué partido apostar?



- $\boldsymbol{D} = \{d_1, d_2\}$

  donde, d_1 = Apostar al partido Conservador

  d_2 = Apostar al partido Laboral

- $\boldsymbol{E} = \{E_1, E_2\}$

  donde, E_1 = Que gane el partido Conservador

  E_2 = Que gane el partido Laboral

  Sea π = P(gane el partido Conservador) = $P(E_1)$, entonces

  $1-\pi$ = P(gane el partido Laboral) = $P(E_2)$

- $\boldsymbol{C} = \{c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}\}$. Si la apuesta es de k libras entonces, $c_{11} = -k + \frac{7}{4}k = \frac{3}{4}k$

$c_{12} = -k$

$c_{21} = -k$

$c_{22} = -k + \frac{5}{4}k = \frac{1}{4}k$

Supongamos que la utilidad es proporcional al dinero, i.e., $u(c_{ij}) = c_{ij}$

- Caso 1: $\pi = 1/2$

P(E)	1/2	1/2
u(d,E)	$\mathbf{E_1}$	$\mathbf{E_2}$
$\mathbf{d_1}$	(3/4)k	-k
$\mathbf{d_2}$	-k	(1/4)k

1) *Optimista*: d_1 (apostar al partido Conservador)
2) *Pesimista*: d_1 ó d_2, nos da igual cualquiera de las dos
3) *Consecuencia más probable*: d_1 ó d_2, nos da igual cualquiera de las dos

   Si se toma a E_1 como “seguro” $\Rightarrow d_1$

   Si se toma a E_2 como “seguro” $\Rightarrow d_2$
4) *Utilidad esperada*: d_1 (apostar al partido Conservador)

   $E\{u(d_1)\} = (1/2)(3/4)k + (1/2)(-k) = -(1/8)k$

   $E\{u(d_2)\} = (1/2)(-k) + (1/2)(1/4)k = -(3/8)k$

- Caso 2: $\pi = 1/4$

P(E)	1/4	3/4
u(d,E)	**E_1**	**E_2**
d_1	(3/4)k	-k
d_2	-k	(1/4)k

1) *Optimista*: d_1 (apostar al partido Conservador)
2) *Pesimista*: d_1 ó d_2 (da igual cualquiera de las dos)
3) *Consecuencia más probable*: d_2 (apostar al partido Laboral)

   Se toma a E_2 como "seguro" $\Rightarrow d_2$
4) *Utilidad esperada*: d_2 (apostar al partido Laboral)

   $$E\{u(d_1)\} = (1/4)(3/4)k + (3/4)(-k) = -(9/16)k$$

   $$E\{u(d_2)\} = (1/4)(-k) + (3/4)(1/4)k = -(1/16)k$$

Observación: Existen ciertos valores de π para los cuales se decide a d_1 y otros para los cuales se decide d_2 como la mejor opción.

- Caso 3: Caso general, $\pi \in [0,1]$

P(E)	π	$1-\pi$
u(d,E)	**E_1**	**E_2**
d_1	(3/4)k	-k
d_2	-k	(1/4)k

1) *Optimista*: d_1 (apostar al partido Conservador)
2) *Pesimista*: d_1 ó d_2 (da igual cualquiera de las dos)
3) *Consecuencia más probable*: d_1 ó d_2 (dependiendo)

   Si $\pi > 1/2$ se toma a E_1 como "seguro" $\Rightarrow d_1$

   Si $\pi \leq 1/2$ se toma a E_2 como "seguro" $\Rightarrow d_2$
4) *Utilidad esperada*: d_1 ó d_2 (dependiendo)

   Las utilidades esperadas son:

$$E\{u(d_1)\} = \pi(3/4)k + (1-\pi)(-k) = \{(7/4)\pi - 1\}k$$

$$E\{u(d_2)\} = \pi(-k) + (1-\pi)(1/4)k = \{(1/4) - (5/4)\pi\}k$$

   Entonces, la mejor decisión sería:

   Si $E\{u(d_1)\} > E\{u(d_2)\} \Leftrightarrow \pi > 5/12 \Rightarrow d_1$

   Si $E\{u(d_1)\} < E\{u(d_2)\} \Leftrightarrow \pi < 5/12 \Rightarrow d_2$

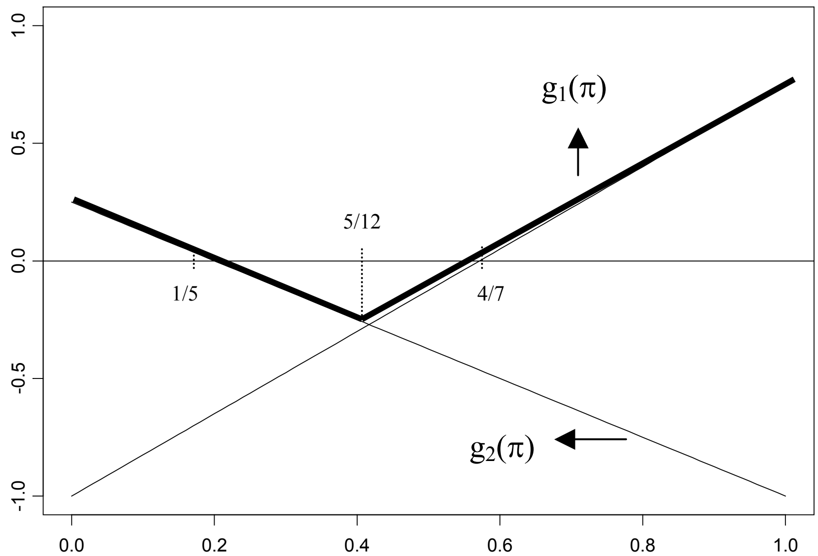
   Si $E\{u(d_1)\} = E\{u(d_2)\} \Leftrightarrow \pi = 5/12 \Rightarrow d_1$ ó d_2

   Gráficamente, si definimos las funciones

$$g_1(\pi) = \left(\frac{7}{4}k\right)\pi - k = E\{u(d_1)\}, \text{ y}$$

$$g_2(\pi) = \left(-\frac{5}{4}k\right)\pi + \frac{k}{4} = E\{u(d_2)\}$$

entonces, si k = 1,



La **línea gruesa** representa la mejor solución al problema de decisión dada por el criterio de la utilidad esperada.

Observación: Si $\pi \in [1/5, 4/7]$, la utilidad esperada de la mejor decisión es negativa!.

Pregunta: ¿Tu apostarías si $\pi \in [1/5, 4/7]$?

- Considera el siguiente problema de decisión:

  D = $\{d_1, d_2, d_3\}$, donde d_3 = no apostar

En este caso, las utilidades esperadas son:

$$E\{u(d_1)\} = \pi(3/4)k + (1-\pi)(-k) = \{(7/4)\pi - 1\}k$$

$$E\{u(d_2)\} = \pi(-k) + (1-\pi)(1/4)k = \{(1/4) - (5/4)\pi\}k$$

$$E\{u(d_3)\} = \pi(0) + (1-\pi)(0) = 0$$

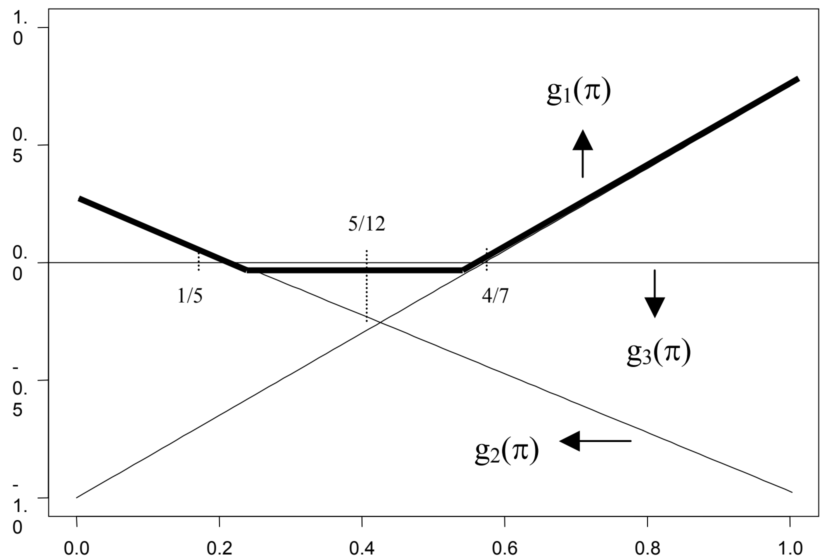
La mejor decisión sería la que maximice la utilidad esperada para distintos valores de $\pi \in [0,1]$. Analicemos la siguiente gráfica. Sean

$$g_1(\pi) = \left(\frac{7}{4}k\right)\pi - k = E\{u(d_1)\},$$

$$g_2(\pi) = \left(-\frac{5}{4}k\right)\pi + \frac{k}{4} = E\{u(d_2)\},$$

$$g_3(\pi) = 0 = E\{u(d_3)\},$$

entonces, si k = 1,



La **línea gruesa** representa la mejor solución al nuevo problema de decisión dada por el criterio de la utilidad esperada.

Por lo tanto, la mejor decisión sería:

Si $\pi < 1/5 \Rightarrow d_2$

Si $1/5 \le \pi < 4/7 \Rightarrow d_3$

Si $\pi \geq 4/7 \Rightarrow d_1$

<u>Observación</u>: En este caso, la utilidad esperada de la mejor decisión *nunca* es negativa!.

<u>Pregunta</u>: ¿Cuál es el valor que la casa esperaría tuviera π?. Intuitivamente, la casa esperaría que $\pi \in [1/5, 4/7]$.

- MORALEJA: Vale la pena incluir todas las opciones factibles en un problema de decisión, excepto las inadmisibles.

- INADMISIBILIDAD de una opción: Una opción d_1 es *inadmisible* si existe otra opción d_2 tal que d_2 es al menos tan preferible como d_1 pase lo que pase (para cualquier suceso incierto) y existe un caso (suceso incierto) para el que d_2 es más preferida que d_1.

- EJEMPLO 5: En una lotería que tiene mil números, se sortea un premio mayor de $5,000 pesos y se dan $10 pesos (reintegro) a todos los boletos cuya última cifra coincide con la del primer premio. Supón que la utilidad del dinero es proporcional a su cantidad. Si el costo de cada billete es de $10 pesos, ¿comprarías tu un billete de lotería?. ¿Cuál debería de ser el *costo justo* del billete?.

- $\boldsymbol{D} = \{d_1, d_2\}$

  donde, d_1 = Comprar un billete de lotería

  d_2 = No comprar un billete de lotería

- $\boldsymbol{E} = \{E_1, E_2, E_3\}$

  donde, E_1 = Que me gane el premio mayor

  E_2 = Que me gane un reintegro

  E_3 = Que no me gane nada

  La verosimilitud de cada unos de estos sucesos inciertos es

  $P(E_1) = 1/1000 = 0.001$

  $P(E_2) = (100-1)/1000 = 0.099$

  $P(E_3) = 0.9$ (por diferencia)

- $\boldsymbol{C} = \{c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{21}\}$

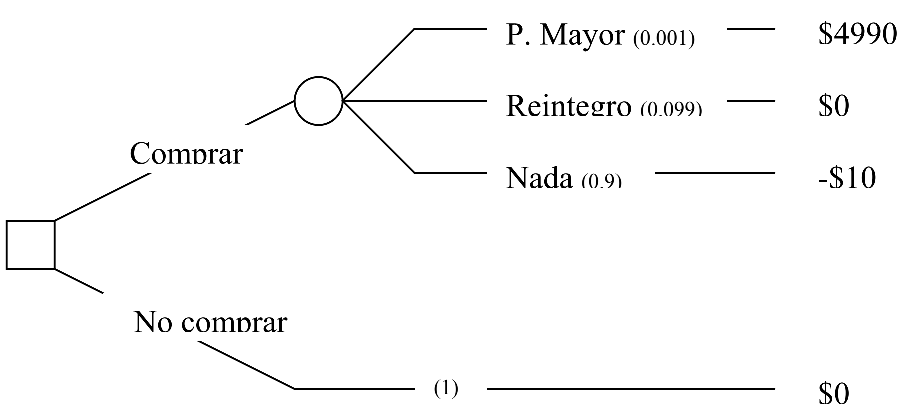
  donde, $c_{11} = 5000-10 = 4990$

  $c_{12} = 10-10 = 0$

  $c_{13} = 0-10 = -10$

  $c_{21} = 0$

  Supongamos que la utilidad es proporcional al dinero, i.e., $u(c_{ij}) = c_{ij}$



1) *Optimista*: d_1 (Comprar)
2) *Pesimista*: d_2 (No comprar)
3) *Consecuencia más probable*: d_2 (No comprar)
4) *Utilidad esperada*: d_2 (No comprar)

   Las utilidades esperadas son:

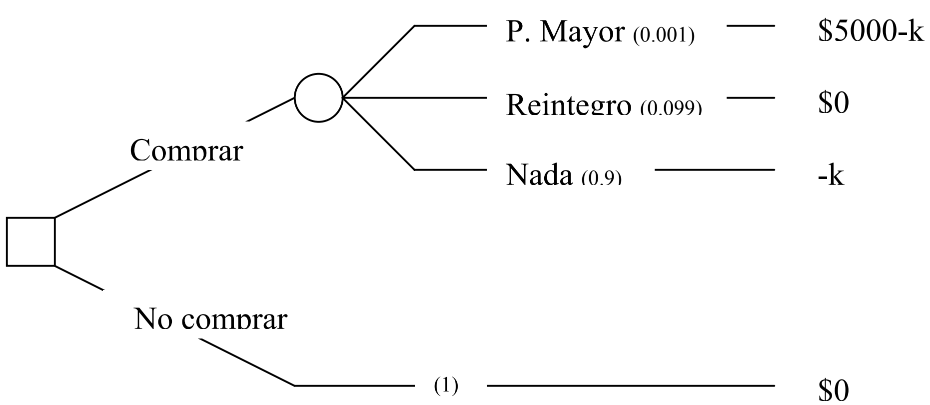
$$E\{u(d_1)\} = (0.001)4990 + (0.099)0 + (0.9)(-10) = -4.01$$

$$E\{u(d_2)\} = (1)0 = 0$$

   Observación: La utilidad esperada de comprar un billete de lotería, desde el punto de vista del comprador es negativa, pero desde el punto de vista del vendedor, es positiva!

- ¿Cómo determinar el *costo justo* del billete de lotería?

Denotemos por *k* al costo del billete, entonces tenemos el siguiente árbol de decisión



Usando la estrategia de la utilidad esperada,

$$E\{u(d_1)\} = (0.001)(5000 - k) + (0.099)(0) + (0.9)(-k) = 5 - (0.901)k$$

$$E\{u(d_2)\} = (1)0 = 0$$

Finalmente,

Si $E\{u(d_1)\} > E\{u(d_2)\} \Leftrightarrow 5 - (0.901)k > 0 \Leftrightarrow k < 5.55 \Rightarrow d_1$

Si $E\{u(d_1)\} < E\{u(d_2)\} \Leftrightarrow 5 - (0.901)k < 0 \Leftrightarrow k > 5.55 \Rightarrow d_2$

Si $E\{u(d_1)\} = E\{u(d_2)\} \Leftrightarrow k = 5.55 \Rightarrow d_1$ ó d_2

Por lo tanto, el *precio justo* del billete de lotería es de **$5.55** pesos.

3. Tratamiento axiomático del problema de decisión

- Recordemos que un problema de decisión en ambiente de incertidumbre queda completamente especificado si se definen los elementos (***D***, ***E***, ***C***, ≤).

- Algunas definiciones que quedan un poco ambiguas cuando se plantea un problema de decisión son las siguientes:
- Una vez que se decidieron las consecuencias posibles del problema, muchas veces no es claro para el decisor cuál de ellas prefiere.
- Decidir los eventos inciertos, que pueden ocurrir para cada opción, no es una tarea fácil, ya que siempre queda la duda si se contemplaron todas las posibilidades.
- Aún cuando el decisor sea capaz de ordenar sus preferencias y se hayan contemplado todas los eventos inciertos posibles, ¿cuál de las 4 estrategias es la que debo de seguir?.

- Los *axiomas de coherencia* son una serie de principios que establecen las condiciones para que las tres ambigüedades anteriores se clarifiquen.

- AXIOMAS DE COHERENCIA. Los axiomas de coherencia son 4:

1. **COMPARABILIDAD**. *Este axioma establece que al menos debemos ser capaces de expresar preferencias entre dos posibles opciones y por lo tanto entre dos posibles consecuencias. Es decir, no todas las opciones ni todas las consecuencias son iguales.*

- Para todo par de opciones d_1 y d_2 en ***D***, es cierta una y sólo una de las siguientes condiciones:

  d_2 es más preferible que $d_1 \Leftrightarrow d_1 < d_2$

  d_1 es más preferible que $d_2 \Leftrightarrow d_2 < d_1$

  d_1 y d_2 son igualmente preferibles $\Leftrightarrow d_1 \sim d_2$

  Además es posible encontrar dos consecuencias c_* (la peor) y c^* (la mejor) tales que para cualquier otra consecuencia c,

  $c_* \leq c \leq c^*$

2. **TRANSITIVIDAD**. *Este axioma establece que las preferencias deben de ser transitivas para no caer en contradicciones.*

- Si d_1, d_2 y d_3 son tres opciones cualesquiera y ocurre que $d_1<d_2$ y $d_2<d_3$ entonces, necesariamente sucede que $d_1<d_3$. Análogamente, si $d_1\sim d_2$ y $d_2\sim d_3$, entonces $d_1\sim d_3$.

3. **SUSTITUCIÓN Y DOMINANCIA**. *Este axioma establece que si se tienen dos situaciones tales que para cualquier resultado que se tenga de la primera, existe un resultado preferible en la segunda, entonces la segunda situación es preferible para todos los resultados.*

- Si d_1 y d_2 son dos opciones cualesquiera y E es un evento incierto y sucede que $d_1<d_2$ cuando ocurre E y $d_1<d_2$ cuando no ocurre E, entonces

$d_1 < d_2$ (sin importar los eventos inciertos). Análogamente, si $d_1 \sim d_2$ cuando ocurre E y $d_1 \sim d_2$ cuando no ocurre E, entonces $d_1 \sim d_2$.

4. **EVENTOS DE REFERENCIA**. *Este axioma establece que para poder tomar decisiones de forma razonable, es necesario medir la información y las preferencias del decisor expresándolas en forma cuantitativa. Es necesario una medida (P) basada en sucesos o eventos de referencia.*

- El decisor puede imaginar un procedimiento para generar puntos en el cuadrado unitario de dos dimensiones, de manera tal que para cualesquiera dos regiones R_1 y R_2 en ese cuadrado , el evento $\{z \in R_1\}$ es más creíble que el evento $\{z \in R_2\}$ únicamente si el área de R_1 es mayor que el área de R_2.