Tarea - Examen

1. Un juego consiste en elegir al azar una carta de una baraja de 52 cartas. Si esta carta es un corazón negro nos pagan 200 pesos y si es un diamante 100 pesos, pero en otro caso hemos de pagar 100 pesos. Para empezar a jugar hay que poner una cantidad inicial de k pesos. Suponiendo la utilidad proporcional al dinero, ¿interesará jugar si k = 30 pesos?. ¿Qué valor de k haría el juego equilibrado?. Responde ambas preguntas usando las cuatro estrategias vistas en clase.

2. En una prueba clínica se intenta comparar dos cremas diferentes que previenen la reaparición de una determinada alergia en la piel. Después de probadas con 150 pacientes, obtendremos la siguiente tabla de probabilidades:

	No reaparece	**Sí reaparece**
Crema 1	0.8	0.2
Crema 2	0.6	0.4

Como la crema 1 produce determinados efectos secundarios, estos nos influye en las utilidades que resultan ser:

	No reaparece	**Sí reaparece**
Crema 1	0.9	0
Crema 2	1	0.1

Aparece un nuevo paciente con ese tipo de alergia. Determina la crema que debe recetársele. Responde usando las cuatro estrategias de decisión.

3. Una compañía que fabrica cierta maquinaria sofisticada debe decidir su plan de producción mensual que puede consistir en fabricar 1, 2 ó 3 máquinas. Sabiendo que la demanda puede ser de 0, 1, 2, 3, 4 máquinas al mes y que la probabilidad de que la demanda sea 2 es de 0.4 y el resto de las demandas son iguales probables, encontrar un plan de producción óptimo sabiendo que hay un beneficio de 7 por unidad vendida, una pérdida de 4 por unidad no satisfecha y una pérdida de 1 por unidad almacenada. Considera la utilidad proporcional al beneficio. Responde usando las 4 estrategias vistas en clase.

4. Juan y María están casados y tienen el mismo tipo de sangre, AB negativo. Hoy por la mañana María tuvo un accidente automovilístico y necesita una transfusión de sangre urgente para salvar su vida. Juan es la única persona (conocida) con el mismo tipo de sangre que le pudiera donar. Juan no está seguro si de niño tuvo hepatitis B, por lo que el donar sangre lo hace dudar debido a que su sangre puede estar contaminada con el virus. Juan cree que existe una probabilidad de 0.5 de tener sangre contaminada con hepatitis B, pero considera la posibilidad de someterse a un examen de sangre para disminuir la incertidumbre sobre la posibilidad tener el virus en su sangre. Si se somete al examen y sale positivo (P1) tiene forzosamente que someterse a un segundo examen que da resultados más precisos e independientes del primer examen, en cambio si sale negativo (N1) no es necesario que se someta a un segundo examen. Sea SC el evento de que Juan realmente tenga sangre contaminada con el virus de hepatitis B y SN el evento de que su sangre no este contaminada. Suponga que la efectividad de las exámenes son: $P(P1|SC)=0.95$, $P(N1|SN)=0.8$, $P(P2|SC)=0.95$ y $P(N2|sN)=0.95$.

Suponga además que la probabilidad de que María sobreviva si no recibe ninguna transfusión sanguínea es de 0.3, sin embargo, si recibe una transfusión con sangre no contaminada aumenta a 0.9, pero si recibe una transfusión con sangre contaminada disminuye a 0.1. Entre más tiempo se tarde Juan en decidir las probabilidades de que su mujer sobreviva disminuyen debido a la pérdida de sangre en su cuerpo. La probabilidad de que María sobreviva si recibe una transfusión con sangre no contaminada disminuye en 0.1 por cada examen al que Juan se someta, en cambio las probabilidades de que sobreviva si recibe sangre contaminada o si no recibe ninguna transfusión no cambian.

Considerando que las utilidades son proporcionales a la probabilidad de que María sobreviva, ¿debería Juan someterse al examen de sangre antes de tomar la decisión de donarle sangre a su esposa?, ¿debería Juan donarle sangre a su esposa?.

5. Se sabe que la cantidad de enzima gamma glutamil-traspepditasa (γGT) en el suero sanguíneo en varones θ, tiene un valor medio de 22.75 mU/ml y que, con probabilidad 0.99, es menor que 42.75. Para determinar la cantidad de enzima θ en el suero sanguíneo de un determinado paciente, va a realizarse una medición con un aparato que produce medidas normales, centradas en θ con desviación estándar igual a 3 mU/ml.

a. Determina la distribución normal que mejor describe la información inicial.
b. Determina la correspondiente distribución predictiva para la medición con el aparato.
c. ¿Cuál es la probabilidad de que el aparato dé una medición mayor a 4 mU/ml?.

6. En una investigación sobre la proporción θ de personas afectadas por una epidemia se realiza un muestreo de 100 personas elegidas al azar, 8 de las cuales resultan estar afectadas. Se sabe que la proporción θ de personas afectadas puede describirse mediante una distribución Beta de media 0.1 y desviación estándar de 0.05.

a. Determina los parámetros de la distribución inicial de la proporción de personas afectadas.
b. Encuentra la distribución final de la proporción de personas afectadas.
c. Determina el rango de valores más probables al 95% para la proporción de personas afectadas por la epidemia.

7. Se sabe que las proteínas contenidas en el líquido cefaloraquídeo se sitúan entre 14 y 40 mg /100ml (simétricamente) con probabilidad 0.99. Realizadas dos punciones a un determinado paciente y analizados los resultados se obtienen valores de 26 y 23 mg/100ml con un método que proporciona resultados con distribución normal centrados en el verdadero valor y con desviación típica igual a 3 mg/100ml.

a. Determine la distribución inicial para el contenido proteínico contenido en el líquido cefaloraquídeo.

b. Encuentra la distribución predictiva inicial sobre el resultado de una tercera punción.
c. Calcula la distribución final del contenido proteínico contenido en el líquido cefaloraquídeo.
d. Encuentra la distribución predictiva final sobre el resultado de una tercera punción.
e. Compara las predicciones inicial y final por intervalo al 99% del resultado de una tercera punción.

8. Sea θ la efectividad al *bat* de un jugador de *baseball*. Al principio de la temporada, la mejor estimación que su entrenador da para θ es 0.25 y piensa que los momios son de 19 a 1 a favor de que θ esté entre 0.21 y 0.29. Suponga que se tiene un modelo Bernoulli.

a. Encuentra una distribución inicial Beta para θ. (Explica por qué los momios implican que θ tiene una media inicial de 0.25 y una desviación estándar inicial de 0.02).

Supongamos que en sus primeros 50 turnos al *bat* el jugador obtiene 10 *hits* (golpes buenos), es decir, (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0).

b. Encuentra la distribución posterior del entrenador para la efectividad del jugador.
c. Encuentra la media, moda y desviación estándar de esta distribución posterior.
d. Grafica la distribución posterior especificando aproximadamente la localización de la media y un par de puntos extremos.
e. Encuentra la probabilidad posterior de que la efectividad al *bat* del jugador sea menor a 0.23.
f. Encuentra un intervalo de máxima densidad al 90% para θ.
g. Compara los momios posteriores con los momios iniciales a favor de que θ esté entre 0.21 y 0.29.

9. Suponga que accidentes serios han ocurrido aleatoriamente en una fábrica a una tasa de 1 por mes. Reglas nuevas de seguridad se han instituido con la esperanza de reducir la intensidad λ de esos accidentes. La distribución inicial para la nueva intensidad se considera Gamma con parámetros $\alpha_0 = 16$ y $\beta_0 = 20$.

a. Encuentra la media y la desviación estándar de la distribución inicial de la intensidad de los accidentes.

b. ¿Cuál es la probabilidad inicial de que la intensidad de los accidentes sea menor a 1?

Suponga que en una muestra de 24 meses posteriores a la implantación de las nuevas reglas de seguridad se observaron los siguientes números de accidentes (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0).

c. Encuentra la distribución posterior de la intensidad de accidentes.

d. Encuentra la media y las desviación estándar posterior de la intensidad λ.

e. Encuentra la probabilidad posterior de que la intensidad de accidentes sea menor a 1. Compara este valor con el resultado obtenido en el inciso b. y comenta.

Suponga que un nuevo jefe de la planta cree que la distribución inicial para la nueva intensidad es Gamma con media 0.80 y desviación estándar 0.05.

f. Determina los nuevos valores de los parámetros α_0 y β_0 que se ajustan a las especificaciones de media y desviación estándar del nuevo jefe.

g. Repite los incisos b. c. d. y e. con esta nueva distribución inicial.

10. Las utilidades mensuales de una compañía tienen una desviación estándar $\sigma = 10$. La distribución inicial para utilidad promedio anual μ es N(200, 400).

a. Encuentra la probabilidad inicial de que la utilidad promedio sea menor a 198.

b. Encuentra un intervalo inicial de máxima densidad al 90% para la utilidad promedio.

Suponga que una muestra de $n = 10$ meses de esta compañía dio las siguientes utilidades (212, 207, 210, 196, 223, 193, 196, 210, 202, 221).

c. Encuentra la probabilidad posterior de que la utilidad promedio sea menor a 198.
d. Entre que valores podemos asegurar que se encuentra la utilidad promedio con 90% de probabilidad después de haber observado la muestra.

11. Un gerente de producción necesita establecer los estándares del tiempo de reparación de una lavadora. Suponga que estos tiempos siguen una distribución normal con desviación estándar σ = 8 minutos. La mejor aproximación que el gerente puede dar para el verdadero tiempo medio de reparación μ es de 30 minutos y está 95% seguro de que el tiempo medio está entre 20 y 40 minutos. Una muestra de 50 reparaciones dio los siguientes tiempos (45, 46, 41, 66, 36, 38, 33, 56, 54, 36, 50, 44, 38, 42, 48, 42, 33, 43, 39, 40, 30, 25, 33, 51, 34, 48, 23, 36, 38, 35, 49, 38, 42, 51, 44, 47, 40, 39, 57, 27, 36, 40, 44, 43, 30, 38, 43, 19, 33, 37).

a. Determina la distribución inicial para el tiempo medio de reparación.
b. Con la información de os 50 tiempos de reparación, encuentra la distribución posterior para el tiempo medio de reparación.
c. Encuentra un intervalo posterior de máxima densidad al 95% para el tiempo medio de reparación. Compara este intervalo con la idea inicial del gerente y comenta.

12. Un laboratorio farmacéutico quiere lanzar una nueva pastilla antigripal. Sea θ la probabilidad de que el nuevo antigripal sea eficaz. Las hipótesis a contrastar son:

$$H_0: \theta>0.95 \quad \text{vs.} \quad H_1: \theta\leq 0.95.$$

Si se acepta H_0 siendo cierta, se obtiene un beneficio de 10 millones debido a la comercialización de un producto útil, mientras que si se acepta siendo falsa, se incurre en una pérdida de 7 millones debido a que el producto ya comercializado debe ser retirado del mercado. Si se rechaza H_0 el producto no es comercializado y se pierden 0.5 millones invertidos en investigación. La información inicial sobre θ se puede describir mediante la distribución Beta(15,3). Probado el nuevo antigripal en 50 pacientes, se observó una reacción positiva en 47 de ellos. Determina la decisión óptima suponiendo la pérdida proporcional al dinero.

13. Realiza un análisis Bayesiano de algún problema de tu interés con datos "reales" utilizando la metodología vista en clase.