ESTADISTICA MATEMATICA

Tarea 2

1. Sea $X_1,X_2,...,X_n$ una m.a. de la densidad $N(0,\sigma^2)$.
   a) Encuentra un estimador de σ^2 por el método de momentos.
   b) Encuentra un estimador de σ^2 por el método de máxima verosimilitud.
   c) ¿Será insesgado el estimador encontrado en el inciso (b)?. Si no lo es, propón uno que sí lo sea.
   d) Encuentra la cota inferior de Cramer-Rao para estimadores insesgados de σ^2.
   e) Verifica si el estimador insesgado propuesto en el inciso (c) alcanza la cota, si no, ¿para qué funciones de σ^2 se alcanzaría la cota?.

2. Sean $X_1,X_2,...,X_n$ v.a.i. con función de densidad
$$f(x_i|\theta) = e^{i\theta - x_i} I_{[i\theta,\infty)}(x_i)$$
   a) Encuentra un estimador de momentos de θ. *Sugerencia*: Realiza la transformación $Y_i = (X_i - 1)/i$ y verifica que $Y_1,\ldots,Y_n$ son v.a.'s con esperanza común.
   b) Encuentra un estimador de máxima verosimilitud para θ.
   c) Con base en el ECM de cada uno de los estimadores, indica cuál de los dos es mejor.
   d) ¿Serán consistentes los estimadores encontrados en los incisos (a) y (b)?.
   e) Encuentra un estimador insesgado para θ basado en la estadística suficiente minimal.

3. Sean $X_1,X_2,...,X_n$ v.a.i. con función de densidad
$$f(x_i|\theta) = \frac{1}{2i\theta} I_{[-i(\theta-1),i(\theta+1)]}(x_i),\ \theta > 0$$
   a) Encuentra un estimador de momentos de θ. ¿Será necesaria una transformación como en el ejercicio anterior?.
   b) Encuentra un estimador de máxima verosimilitud para θ.

4. Sea $f(x,y|\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$ una función de densidad bivariada de una distribución uniforme en el rectángulo formado por la esquina inferior izquierda (θ_1,θ_2) y por la esquina superior derecha (θ_3,θ_4) en $\Re^2$. Los parámetros satisfacen $\theta_1 < \theta_3$ y $\theta_2 < \theta_4$. Sean $(X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n)$ una muestra aleatoria de esta densidad. Encuentra un estimador para $(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4)$ por el método que quieras.

5. Sean $X_1,X_2,...,X_n$ v.a.i.i.d. con función de densidad
$$f(x|\theta) = I_{[\theta,\theta+1]}(x),\ \theta \geq 0$$
   a) Encuentra un estimador para θ por el método de momentos.
   b) ¿Será insesgado el estimador del inciso (a)?.
   c) Encuentra un estimador de máxima verosimilitud para θ.
   d) Encuentra la cota inferior de Cramer-Rao para estimadores insesgados de θ.
   e) ¿Existirá el UMVUE para θ?, Si sí, encuéntralo.
   f) Encuentra un estimador máximo verosímil para la mediana de la distribución.

6. Para cada una de las siguientes distribuciones, sean $X_1,X_2,...,X_n$ una m.a. Encuentra los estimadores de momentos y de máxima verosimilitud para los parámetros de la distribución. Si los estimadores son distintos compáralos de acuerdo al criterio de ECM y finalmente investiga la existencia del UMVUE.
   a) $f(x|\theta)=\theta^{x}(1-\theta)^{1-x}I_{\{0,1\}}(x)$, $\theta\in(0,1)$ (Bernoulli)
   b) $f(x|\theta)=\binom{m}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{m-x}I_{\{0,1,\ldots,m\}}(x)$, $\theta\in(0,1)$ (Binomial)
   c) $f(x|\lambda)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x}}{x!}I_{\{0,1,\ldots\}}(x)$, $\lambda>0$ (Poisson)
   d) $f(x|\theta)=\theta(1-\theta)^{x}I_{1\{0,1,\ldots\}}(x)$, $\theta\in(0,1)$ (Geométrica)
   e) $f(x|\theta)=\frac{1}{\theta}I_{\{1,2,\ldots,\theta\}}(x)$, $\theta=1,2,\ldots$ (Uniforme discreta)
   f) $f(x|\alpha,\theta)=(1-\theta)\theta^{x-\alpha}I_{1\{\alpha,\alpha+1,\ldots\}}(x)$, $\theta\in(0,1)$, $\alpha\in\Re$
   g) $f(x|\theta)=\frac{1}{\theta}I_{[\theta,2\theta]}(x)$, $\theta>0$ (Uniforme)
   h) $f(x|\theta)=\theta e^{-\theta x}I_{(0,\infty)}(x)$, $\theta>0$ (Exponencial)
   i) $f(x|\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}I_{(-\infty,\infty)}(x)$, $\mu\in\Re$, $\sigma^2>0$ (Normal)
   j) $f(x|a,b)=\frac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}I_{(0,1)}(x)$, $a>0$, $b>0$ (Beta)
   k) $f(x|\alpha,\beta)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}I_{(0,\infty)}(x)$, $\alpha>0$, $\beta>0$ (Gamma)
   l) $f(x|\mu)=e^{-(x-\mu)}I_{[\mu,\infty)}(x)$, $\mu\in\Re$ (Exponencial trasladada)
   m) $f(x|\mu)=\frac{1}{2}e^{-|x-\mu|}I_{(-\infty,\infty)}(x)$, $\mu\in\Re$ (Doble exponencial)
   n) $f(x|\theta)=\frac{e^{-(x-\theta)}}{\{1+e^{-(x-\theta)}\}^{2}}I_{(-\infty,\infty)}(x)$, $\theta\in\Re$ (Logística)
   o) $f(x|\theta)=\frac{1}{\pi\{1+(x-\theta)^{2}\}}I_{(-\infty,\infty)}(x)$, $\theta\in\Re$ (Cauchy)
   p) $f(x|\alpha,\beta)=\frac{\beta\alpha^{\beta}}{x^{\beta+1}}I_{[\alpha,\infty)}(x)$, $\alpha>0$, $\beta>0$ (Pareto)
   q) $f(x|a,b)=abx^{a-1}e^{-bx^{a}}I_{(0,\infty)}(x)$, $a>0$, $b>0$ (Weibull)
   r) $f(x|a,b)=abe^{ax}\exp\{-b(e^{ax}-1)\}I_{(0,\infty)}(x)$, $a>0$, $b>0$ (Gompertz)
   s) $f(x|\theta)=\frac{\theta}{x^{2}}I_{[\theta,\infty)}(x)$, $\theta>0$
   t) $f(x|\theta)=\frac{2}{\theta^{2}}(\theta-x)I_{(0,\theta)}(x)$, $\theta>0$
   u) $f(x|\theta)=e^{-(x-\theta)}\exp\{-e^{-(x-\theta)}\}I_{(-\infty,\infty)}(x)$, $\theta\in\Re$