CALCULO DE PROBABILIDADES I

Tarea 4

1.Suponga que X tiene una distribución Geométrica con $p = 0.8$.
a)Encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:
a.1) $X > 3$
a.2) $4 < X \leq 7$ ó $X > 9$
a.3) $3 \leq X \leq 5$ ó $4 \leq X \leq 10$
a.4) $X > 7$ si se se sabe que $X > 4$
b)Si ahora el parámetro p es igual a 0.3, ¿cómo cambian las probabilidades anteriormente obtenidas?

2.Sea X una v.a. con distribución Uniforme en 0, 1,..., 99. Calcule:
a)$P(X \geq 25)$;
b)$P(2.6 < X < 12.2)$;
c)$P(8 < X \leq 10$ ó $30 < X \leq 32)$;
d)$P(25 \leq X \leq 30)$.

3.Sea X una v.a. con distribución Geométrica con parámetro p.
a)Demuestre que $\Sigma_{x=0} f(x) = 1$.
b)Se define la v.a. Y como, $Y = X$ si $X < M$ y $Y = M$ si $X \geq M$; es decir $Y = Min(X , M)$. Encuentre la densidad de Y.

4.Use la aproximación Poisson para calcular:
a)la probabilidad de que a lo más 2 de 50 personas tengan su licencia vencida, si usualmente el 5% de las personas tienen vencida su licencia.
b)la probabilidad de que una caja de 100 fusibles tenga a lo más 2 fusibles defectuosos si se sabe que el 3% de los fusibles fabricados son defectuosos.

5.Sea X el tiempo de decaimiento de alguna partícula radioactiva y suponga que la distribución de X es Exponencial(λ). Si λ es tal que $P(X \geq 0.01) = 1/2$, encuentre el número t tal que $P(X \geq t) = 0.9$.

6.a)Sea $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. Encuentre $P(|X - \mu| \leq k \sigma)$, $k = 1, 2, 3$.
b)Suponga que $\mu = 5$ y $\sigma^2 = 9$. De acuerdo a lo hecho en el inciso anterior encuentre, para cada valor de k, el intervalo en donde se encuentra la v.a. X.

7.Suponga que el peso (kg) de una persona seleccionada aleatoriamente de una población es una v.a. X con distribución normal de parámetros μ y σ^2. Suponga también que $P(X \leq 60) = 1/2$ y que $P(X \leq 52) = 1/4$.
a)Encuentre el valor de los parámetros μ y σ.
b)Encuentre $P(X \geq 75)$.
c)De todas las personas en la población que pesan al menos 75 kg, ¿qué porcentaje pesará arriba de 82 kg?.

8.Sea t_p el número tal que $\Phi(t_p) = p$, $0< p < 1$ (Φ es la función de distribución acumulada de una $N(0,1)$). Si X es una v.a. con distribución $N(\mu,\sigma^2)$, demuestre que $P(\mu + t_{p_1}\sigma \leq X \leq \mu + t_{p_2}\sigma) = p_2 - p_1$, en donde $0< p_1 < p_2 < 1$.

9.Suponga que un número muy grande de partículas radioactivas tienen tiempo de decaimiento distribuído exponencialmente con parámetro λ. Si la mitad de las partículas decaen durante el primer segundo, ¿cuánto tiempo tendrá que pasar para que el 75% de las partículas decaigan?.

10.Demuestre que si $\alpha > 1$, la densidad gamma(α, λ) tiene un máximo en $(\alpha - 1)/\lambda$.

11.Encuentre $\Phi^{-1}(t)$ para $t = 0.1, 0.2,..., 0.9$ y use estos valores para graficar Φ^{-1}.

12. Encuentre el valor Q_j tal que $P(X \leq Q_j) = j/4$, j = 1, 2, 3, en donde X tiene una distribución
a) $N(\mu,\sigma^2)$.
b) Cauchy.
c) Exponencial(λ).
d) Para cada una de las tres anteriores distribuciones construya una gráfica de la función de densidad e identifique los valores Q_1, Q_2 y Q_3. (Para la normal considere $\mu = 1$ y $\sigma^2 = 1$, y para la exponencial, $\lambda = 1$)
Nota: para toda distribución, los valores Q_1, Q_2 y Q_3 reciben el nombre de **cuartiles.**

13. Sea $X \sim N(\mu, 0.25)$. Encuentre la constante c tal que $P(|X - \mu| \leq c) = 0.9$.

14. Sea X v.a. que se distribuye Exp(θ).
a) Encuentre F(x) y construya la gráfica de esta función para distintos valores de θ.
b) Demuestre que $P(X > x_0 + x \mid X > x_0) = P(X > x)$, para todo $x \geq 0$ y $x_0 \geq 0$. Esta propiedad se denomina **pérdida de memoria**, y caracteriza a la distribución exponencial.

15. a) Sea X v.a. con distribución binomial(n=25, p=0.2). Encuentre $P(X < np - 2(npq)^{1/2})$.
b) Si X es una v.a. con distribución Poisson para la cual $P(X = 0) = P(X = 1)$, ¿cuál es el valor de λ?.
c) ¿Cuándo puede asegurarse que la distribución de X es la misma que la de - X?.

16. Sea X v.a. con distribución N(2,1). Encuentre $P(|X - 2| \leq 1)$.

17. Encuentre el valor en el cual se maximiza la función de densidad de las siguientes distribucióness,
a) Beta(a,b)
b) Gamma(a,b)

18. a) Si X se distribuye N(2,2) exprese $P(|X - 1| \leq 2)$ en términos de la distribución acumulada de una Normal estandar.
b) Si X se distribuye $N(\mu,\mu^2)$, $\mu > 0$, exprese $P(X < - \mu \mid X < \mu)$ en términos de la distribución acumulada de una Normal estandar.
c) Si X se distribuye $N(\mu,\sigma^2)$, y σ^2 es una función de μ, $\sigma^2 = h(\mu)$, ¿de qué forma tiene que ser $h(\cdot)$ para que $P(X \leq 0)$ no dependa de μ para $\mu > 0$?.

19. Un vendedor ha encontrado que el número de artículos de la marca ABC que puede vender en un día es una v.a. Po(4).
a) Construya una gráfica de la función de densidad correspondiente.
b) ¿Cuántos artículos de la marca ABC debe tener el vendedor para estar 95% seguro de que tiene los suficientes artículos para que le duren 5 días? (Dé una respuesta numérica).

20. a) Si X se distribuye Binomial con parámetros (n,p), ¿cuál es la distribución de Y = n - X?.
b) Dos dados se lanzan n veces. Sea X el número de lanzamientos en los cuales el número del primer dado es mayor al número del segundo dado. ¿Cuál es la distribución de X?
c) Una persona que ha ingerido mucho alcohol realiza una "caminata aleatoria" moviéndose a las posiciones 0, ±1, ±2, ... de la siguiente manera: comienza en la posición 0, después se mueve sucesivamente con pasos de una unidad, a la derecha con probabilidad p y a la izquierda con probabilidad 1 - p. Cada movimiento es independiente de los demás. Sea X su posición después de n pasos. Encuentre la distribución de $(X + n)/2$.
d) Sean X_1 y X_2 v.a. con distribución Binomial con parámetros (n,p_1) y (n,p_2), respectivamente. Si $p_1 < p_2$, demuestre que $P(X_1 \leq k) \geq P(X_2 \leq k)$ para k = 0, 1,..., n. (Este resultado muestra que entre mas pequeño sea el valor de p, mas sesgada hacia la derecha es la distribución binomial)

21. a) En cierta localidad donde habitan 5000 personas adultas se seleccionó al azar una muestra de tamaño 100. Al preguntarle a cada persona seleccionada cuál era su opinión con respecto a un proyecto municipal, resultó que 60 lo apoyaron y 40 se opusieron a él. Si se supone que en toda la localidad la

mitad de las personas adultas estan a favor del proyecto y la otra mitad está en contra, ¿cuál es la probabilidad de obtener una mayoría de 60 o más a favor del proyecto en una muestra de tamaño 100?.
b)Responder el inciso anterior aplicando alguna aproximación adecuada.

22.Considere una distribución Hipergeométrica(M,K,n). Demuestre el siguiente resultado,

$$\lim_{\substack{M\to\infty \\ K\to\infty \\ K/M\to p}} \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} = \binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}$$

Este resultado nos dice bajo qué condiciones la distribución Hipergeométrica se puede aproximar por una distribución Binomial.

23.Suponga que el número de accidentes fatales de automóvil, en cierta zona de la ciudad, obedece una distribución Poisson con un promedio de un accidente por día.
a)¿Cuál es la probabilidad de que más de 10 accidentes ocurran en una semana?
b)¿Cuál es la probabilidad de que transcurran más de 2 días entre dos accidentes?

24.Si X es una v.a. Binomial(n,p), demuestre que

$$P(X \geq k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} p^{j} q^{n-j} = \frac{1}{B(k, n-k+1)} \int_0^p u^{k-1}(1-u)^{n-k}\, du$$

en donde $B(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$. Este resultado nos dice que si X se distribuye Binomial con parámetros (n,p) y Y se distribuye Beta con parámetros (k,n-k+1), entonces $1- F_X(k-1) = F_Y(p)$.

25.Suponga que X tiene una distribución Binomial con parámetros (n,p) y Y tiene una distribución Binomial negativa con parámetros (r,p). Demuestre que $F_X(r-1) = 1 - F_Y(n-r)$.

26.Existe un conjunto de funciones de densidad que se denomina **familia exponencial.** Los elementos de esta familia son aquellas densidades $f(\cdot\,; \theta_1,..., \theta_k)$ que pueden ser expresadas como,

$$f(x;\theta_1,\ldots,\theta_k) = a(\theta_1,\ldots,\theta_k)\, b(x) \exp \sum_{j=1}^{k} c_j(\theta_1,\ldots,\theta_k)\, d_j(x)$$

para cualesquiera funciones $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, $c_j(\cdot)$, $d_j(\cdot)$.

a)Demuestre que la distribución Binomial pertenece a la familia exponencial.
b)Demuestre que la distribución Normal pertenece a la familia exponencial.

27.Sea X una v.a.. El valor x para el cual se ha acumulado una probabilidad igual a p, está dado por $F_X(x)=p$. Considere los siguientes valores de p: 0.25, 0.48, 0.79, 0.98. Mediante el uso de tablas o de algún paquete para computadora, encuentre el valor x correspondiente a cada uno de los anteriores valores de p, suponiendo que la distribución de X es
a)Ji-cuadrada con 25 grados de libertad
b)Gamma(3,7)
c)Beta(2,3)

28.Un distribuidor de semillas de frijol ha determinado, despues de varios estudios, que el 5% de las semillas no germinan. Si esta persona vende paquetes de 200 semillas y garantiza una germinación del 90%, ¿cuál es la probabilidad de el paquete viole la garantía?

29.a)Se ha implementado un proceso de fabricación de transistores en donde se pretende no tener mas del 1% de artículos defectuosos. Cada hora se seleccionan al azar 10 transistores de la linea de producción. Si uno o más de los 10 transistores son defectuosos, se para el proceso para hacer los ajustes necesarios. Si se supone que el proceso es tal que la probabilidad de obtener un artículo defectuoso es igual a 0.01, ¿cuál es la probabilidad de que, en un momento dado, el proceso sea detenido innecesariamente?.

b)Con referencia al inciso anterior, ¿cuántos transistores (en lugar de 10) deberían ser examinados si el fabricante desea que, con probabilidad 0.95, el proceso tenga que detenerse cuando se producen 10% de artículos defectuosos?

30.Sea $X \sim N(0,4)$ y sea Y una v.a. definida como $Y = m$, si $m - 1/2 \leq X < m + 1/2$, en donde m es entero tal que $-5 \leq m \leq 5$, $Y = -6$, si $X < -5.5$, y $Y = 6$, si $X \geq 5.5$. Encuentre la función de densidad de Y y grafique esta función.

31.Sea T una v.a. continua tal que $P(T < 0) = 0$, que denota el tiempo de falla en algun sistema. Sea F la función de distribución de T y suponga que $F(t) < 1$, para $0 < t < \infty$. Si $F(t) = 1 - e^{-G(t)}$, $t > 0$, y $G'(t) = g(t)$ existe para $t > 0$,

a)demuestre que la función de densidad de T está dada por,

$$\frac{f(t)}{1-F(t)} = g(t) \quad , \quad 0 < t < \infty.$$

Nota: la función g se conoce como la **razón de falla**, porque heuristicamente,

$$P(t \leq T \leq t + dt | T > t) = \frac{f(t)dt}{1-F(t)} = g(t)dt.$$

b)Demuestre que para $s > 0$ y $t > 0$,

$$P(T > t + s \mid T > t) = e^{-\int_t^{t+s} g(u)\,du}.$$

c)Demuestre que el sistema se mejora con el tiempo (es decir, para s fija la probabilidad del inciso anterior aumenta al aumentar t) si g es una función decreciente, y el sistema se deteriora con el tiempo si g es una función creciente.

d)Demuestre que $\int_0^\infty g(u)\,du = \infty$.

e)¿Cómo se comporta g si T tiene distribución exponencial?

f)Si $G(t) = \lambda t^\alpha$, $t > 0$, ¿para qué valores de α el sistema se mejora, se deteriora o se mantiene sin cambio al paso del tiempo?.

32.Sea X una v.a. cuyos posibles valores son enteros y su función de distribución acumulada es F. Sea $Y \sim U(0,1)$. Se define la variable Z como $Z = m$, si $F(m - 1) < Y \leq F(m)$, para todo entero m. Demuestre que Z tiene la misma densidad que X.

33.Una compañía de seguros encontró que el 0.005% de las personas en un país, mueren por cierto tipo de accidente cada año. ¿Cuál es la probabilidad de que la compañía tenga que pagar a más de tres de un total de 10000 asegurados debido a este accidente en un año?. Calcule la probabilidad exacta y también en forma aproximada.

34.La deficiencia de células rojas en la sangre se puede determinar examinando una muestra de sangre en el microscopio. Suponga que en las personas normales una muestra de volumen específico de sangre contiene en promedio 20 células rojas. ¿Cuál es la probabilidad de que para una persona normal, una muestra de sangre pueda contener menos de 15 células rojas?

35.Se formó un jurado de seis personas de un grupo de 20 posibles miembros, de los cuales 8 eran mujeres y 12 eran hombres. El jurado se seleccionó aleatoriamente, pero solo contenía a una mujer. ¿Tiene usted algún motivo para dudar de la aleatoriedad en la selección?.

36.Muchas veces se estima el tamaño de las poblaciones de animales utilizando el método de captura-marcaje-recaptura. Bajo este método se capturan **k** animales, se les marca y se les regresa a la población. Después de cierto tiempo se capturan **n** animales y se anota el número de animales marcados (W). Las probabilidades asociadas a W son función de **N**, el número de animales en la población, y el valor observado de W contiene información sobre el valor desconocido de W. Suponga que 4 animales son capturados, marcados y regresados a la población, y que posteriormente se recapturan 3 animales de esta población. Encuentre la función de densidad de W en función de **N**. ¿Qué valor de **N** maximiza P(W = 1)?.

37.Al contestar una pregunta con respecto a un tema de controversia (como, "¿alguna vez ha fumado mariguana?"), muchas veces la gente no quiere ponerse en evidencia al contestar afirmativamente. Obtenga la distribución de probabilidad de Y, el número de personas que se necesitaría entrevistar hasta obtener una respuesta afirmativa, si se sabe que el 80% de la población contestaría verídicamente "no" a la pregunta, y que del 20% que deberían de contestar verídicamente "si", un 70% miente.

38.Las lineas telefónicas de la oficina de reservaciones de la linea aérea SELEVO se encuentran ocupadas alrededor del 60% del tiempo.

a)Si usted llama a esta oficina, ¿cuál será la probabilidad de que le contesten en el primer intento?, ¿en el segundo intento?, y ¿en el tercero?.

b)Si usted y un amigo tienen que llamar a esta oficina (cada quien por su parte), ¿cuál será la probabilidad de que tengan que hacer en total cuatro intentos para que puedan comunicarse los dos?

39.a)Si un paracaidista cae en un sitio aleatorio de la línea recta entre los puntos A y B,

a.1)Encuentre la probabilidad de que esté más cerca de A que de B.

a.2)Calcule la probabilidad de que la distancia con respecto al punto A sea más de tres veces la distancia con respecto al punto B.

b)Si tres paracaidistas caen en forma independiente sobre la linea recta del inciso anterior, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente uno de los tres se encuentre más cerca de A que de B?.

40.La relación entre la distribución Gamma y la distribución Poisson está dada,para valores enteros de α,por

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\lambda}^{\infty} y^{\alpha-1}\, e^{-y}\, dy = \sum_{y=0}^{\alpha-1}\frac{\lambda^{y}\, e^{-\lambda}}{y!}\,.$$

Si Y tiene una distribución Gamma con $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, encuentre P(Y > 1) utilizando la densidad Gamma y tambien utilizando la igualdad anterior.

Nota: La integral que se utiliza en este ejercicio se conoce con el nombre de **integral Gamma incompleta**.

41.La v.a. Y tiene una función de densidad dada por

$$f(y) = \begin{cases} k\, y^{3}\, e^{-y/2}, & y > 0 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Obtenga el valor de k y grafique la función f(y).

42.Si Y ~ Gamma(3,2),

a)Obtenga la función de distribución acumulada de Y.

b)Calcule $P(1 \le Y \le 4)$ y $P(Y \le 0.6)$.

c)Encuentre el valor de Y para el cual la probabilidad acumulada es 0.5.

43.La proporción del tiempo que en un día todas las cajas registradoras de un supermercado están ocupadas, es una v.a. T con función de densidad

$$f(t) = \begin{cases} c\, t^{2}(1-t)^{4}, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

a)Encuentre el valor de c.

b)Obtenga F(t).
c)Calcule $P(0.2 \le T \le 0.4)$.

44.Considere la distribución Beta(α,β). Grafique la función de densidad para cada una de las siguientes parejas (α,β),

α	1	1/4	10	3	1	1.5	6	20	30	120
β	1	1/4	10	3	20	30	120	1	1.5	6

45.Si el número de veces que ocurre un evento en un intervalo de tiempo de longitud t sigue una distribución Poisson(λt), entonces el tiempo entre la ocurrencia de los eventos tiene una distribución Exponencial(1/λ). Si las llamadas de emergencia que llegan en promedio a la Cruz Roja son 10 por hora, ¿cuál es la probabilidad de que transcurran más de 15 minutos entre cualesquiera dos llamadas?.

46.Se dice que una variable aleatoria Y tiene una distribución **Lognormal**, si X = ln(Y) tiene una distribución Normal. La forma de la función de densidad Lognormal es semejante a la de una densidad Gamma, es decir, está sesgada hacia la derecha. La función de densidad Lognormal es

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\, y} e^{-[\ln(y)-\mu]^2/2\sigma^2} & , \quad y > 0 \\ 0 & , \quad \text{e.o.c} \end{cases}$$

Notación: $Y \sim \ln N(\mu,\sigma^2)$

Puesto que ln(Y) es una función monótona de Y, $P(Y \le y) = P[\ln(Y) \le \ln(y)] = P[X \le \ln(y)]$, en donde $X \sim N(\mu,\sigma^2)$. Entonces se pueden obtener las probabilidades de una distribución lognormal utilizando la distribución Normal.
Si $Y \sim \ln N(4,1)$, encuentre $P(Y \le 4)$ y $P(5 \le Y < 8)$.

47.Si W ~ Beta(3,5), calcule $P(0.2 \le W \le 0.4)$ utilizando el resultado del ejercicio 24.

48.El Centro de Cómputo de una Universidad muy reconocida tiene 300 pc's para el uso diario de los estudiantes. La probabilidad de que alguna pc requiera servicio un determinado día es 0.015. ¿Cuál es la probabilidad de que en un día
a)a lo más dos terminales requieran servicio?
b)por lo menos cinco terminales requieran servicio?
c)tres requieran servicio?
Para cada uno de los incisos anteriores obtenga la probalidad en forma exacta y tambien en forma aproximada