# GUIA DE EJERCICIOS PARA CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

ITAM, Agosto 1998.

G. Grabisnky

# INTRODUCCION

La siguiente lista de ejercicios constituye una guía para el estudiante del curso CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I y es tal sólo eso, una guía, en consecuencia es incompleta por definición. La selección de los ejercicios pretende reflejar la variedad y la profundidad que se pide del estudiante.

Considero útil que se haga uso de esta guía en el entendido de que su sólo estudio no es suficiente por lo que hago un llamado al estudiante a profundizar más en cada tema y a hacer más ejercicios de cada tipo, especialmente aquéllos en el que se sienta menos seguro y para todo esto el trabajo de clase, los apuntes y nuestro texto son fundamentales.

Las preguntas de los exámenes departamentales no serán necesariamente iguales a algunos de estos ejercicios, sin embargo sí podrán ser similares tanto en su contenido así como en su complejidad.

Hago votos para que el lector encuentre en estas páginas un apoyo más para el curso.

G. Grabinsky.

# EJERCICIOS

1. Encuentra un conjunto solución de cada una de las siguientes igualdades y desigualdades:

   (a)
   $$|2x + 4| + 5 = 11$$

   (b)
   $$|x^2 + 2| \leq 3$$

   (c)
   $$\left|\frac{1 \Leftrightarrow x}{x \Leftrightarrow 4}\right| > 0$$

   (d)
   $$\frac{x^2 \Leftrightarrow 4}{3x} \geq 1$$

   (e)
   $$\frac{4x^2 + 5}{2 + x} \leq 1$$

   (f)
   $$\frac{x}{2 + x} \leq 2x$$

   (g)
   $$|x + 5| < 2\,|x \Leftrightarrow 1|$$

   (h)
   $$\left|\frac{1}{3x} \Leftrightarrow \frac{1}{27}\right| < 0.1$$

   (i)
   $$\left|\frac{3x + 2}{x} \Leftrightarrow \frac{11}{3}\right| < 0.2$$

   (j)
   $$\frac{(2x \Leftrightarrow 3)(x + 5)}{\Leftrightarrow x^2 + 6x \Leftrightarrow 6} \geq 0$$

   (k)
   $$\frac{(x \Leftrightarrow 1)(x + 1)x}{x^2 \Leftrightarrow x \Leftrightarrow 12} < 0$$

2. Escribe los siguientes intervalos como el conjunto solución de una desigualdad de la forma $|x \Leftrightarrow x_0| < \delta$ para algunas $x_0 \in \mathbf{R}$ y $\delta > 0$

   (a)
   $$\mathcal{I} = (0, 3)$$

   (b)
   $$\mathcal{I} = (\Leftrightarrow 3, 2)$$

   (c)
   $$\mathcal{I} = (3, 3 + a)$$

3. Prueba:
   $$|a + b| = |a| + |b| \;\; \Leftrightarrow \;\; ab \geq 0$$

4. Prueba por inducción:
   Si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ entonces $|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$

5. Muestra con ejemplos que la suma, resta, producto y conciente de dos números irracionales podría *no* dar como resultado un número irracional.

6. Enuncia con todo detalle la propiedad arquemidiana y el axioma del supremo.

7. Usa la propiedad arquimediana para probar que
   si $0 < x < y$ entonces existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $1 < n\left(\frac{x}{y}\right)$

8. Sin probarlo pero justificando brevemente obtén el supremo de $\mathcal{S}$ si:

   (a)
   $$\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right\}$$

   (b)
   $$\mathcal{S} = \{.7, .78, .787, .7878, \ldots\}$$

   (c)
   $$\mathcal{S} = \{x \in \mathbf{Q} \,:\, x^2 < 2\}$$

9. Proporciona un ejemplo de un conjunto acotado $\mathcal{S}$ consistente solamente de números irracionales tal que su supremo sea un número racional.

10. Escribe los siguientes decimales periódicos como cociente de dos números enteros:

   (a)
   $$4.0\overline{17}$$

   (b)
   $$\Leftrightarrow 6.15\overline{32}$$

(c)

$$\Leftrightarrow 15.7\overline{915}$$

(d)

$$0.0\overline{12345}$$

11. Encuentra un mnúmero racional y uno irracional entre:

$$a = \frac{\sqrt{2}}{7} \quad \text{y} \quad b = \frac{\sqrt{5}}{11}$$

12. Qué significa la afirmación "**Q** es denso en **R** " ?

13. Detrmina el dominio de las siguientes funciones:

(a)

$$f(x) = \sqrt{\frac{4 \Leftrightarrow x^2}{x^2 \Leftrightarrow 5x + 6}} + \sqrt{\frac{4x}{x^2 + 1}}$$

(b)

$$f(x) = \sqrt{\frac{x(x \Leftrightarrow 1)(x \Leftrightarrow 5)}{x^2 + 2x}} + \frac{1}{(x^2 \Leftrightarrow 9)^2}$$

(c)

$$f(x) = \sqrt{x^2 \Leftrightarrow 9} + \sqrt{4 \Leftrightarrow x^2}$$

14. Traza la gráfica de $y = f(x)$ si:

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \Leftrightarrow 2 & \text{si} \quad x \leq \Leftrightarrow 3 \\ \Leftrightarrow x + 1 & \text{si} \quad \Leftrightarrow 3 < x < \Leftrightarrow 1 \\ |x| + 1 & \text{si} \quad \Leftrightarrow 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{si} \quad x = 2 \\ 1 \Leftrightarrow x & \text{si} \quad 2 < x \leq 3 \\ 1 & \text{si} \quad 3 < x \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} |x| \Leftrightarrow 2 & \text{si} \quad |x| \leq 1 \\ \Leftrightarrow x^2 & \text{si} \quad 1 < |x| \leq 2 \\ \Leftrightarrow 4 & \text{si} \quad |x| > 2 \end{cases}$$

15. Traza la gráfica de $y = f(x)$ si:

(a)

$$f(x) = |x \Leftrightarrow 3| + 3$$

(b)

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow |x|$$

(c)

$$f(x) = ||x| \Leftrightarrow 3|$$

(d)

$$f(x) = |x^2 \Leftrightarrow 9| + 3$$

(e)

$$f(x) = |x^2 \Leftrightarrow 5x + 6|$$

16. Completa la siguiente tabla:

| | $f$ | $g$ | $g \circ f$ |
|---|---|---|---|
| a. | $3x + 7$ | | $2x \Leftrightarrow 1$ |
| b. | | $\frac{1}{x}$ | $x$ |
| c. | $x^2$ | | $\|x\|$ |
| d. | $\frac{x}{x-1}$ | $\frac{x}{x-1}$ | |
| e. | | $1 + \frac{1}{x}$ | $x$ |
| f. | | $\sqrt{x \Leftrightarrow 5}$ | $\sqrt{x^3 \Leftrightarrow 5}$ |

17. Supón que

$$f(x) = 2x \Leftrightarrow 3$$

obtén

$$g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

tales que

$$f(g(x)) = x + 7 \quad \text{y} \quad h(f(x)) = x + 7, \ \forall\, x \in \mathbf{R}$$

18. Prueba que las siguientes funciones $y = f(x)$ son biyectivas y obtén $x = f^{-1}(y)$ si:

(a)

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad \text{con} \quad f(x) = mx + b, \ (m \neq 0)$$

(b)

$$f : (\Leftrightarrow 1, 1) \to \mathbf{R}, \quad \text{con} \quad f(x) = \frac{x}{1 \Leftrightarrow |x|}$$

(c)

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad \text{con} \quad f(x) = (x - 3)^3 - 1$$

19. Define:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ -\sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Determina $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$, $\frac{1}{g}$ y $fg$ así como sus dominios. Cuáles son sus dominios ? Traza la gráfica de cada una.

20. Calcula la inversa de cada una de las funciones invertibles del ejercicio anterior.

21. Obtén los siguientes límites

(a)

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$$

(b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4 + 3x} - \sqrt{4 - 3x}}{x}$$

(c)

$$\lim_{x \to a^-} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{-a}}{|x + a|}, \ (a < 0)$$

(d)

$$\lim_{x \to 9^+} \frac{|81 - x^2|}{\sqrt{x} - 3}$$

(e)

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 + x + 1}{-|1 + x|}$$

(f)

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2 - x} - 1}{2 - \sqrt{x + 3}}$$

(g)

$$\lim_{x \to 0} \ x\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}$$

(h)

$$\lim_{x \to 0^+} \left( \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(-x)^{\frac{1}{3}}} \right)$$

(i)

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x}{x^2 \Leftrightarrow 1} \Leftrightarrow \frac{1 \Leftrightarrow x}{4x}}$$

(j)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 \Leftrightarrow x+1}\right)$$

(k)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1 \Leftrightarrow \cos x}$$

(l)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ \tan x}{\cos x \Leftrightarrow 1}$$

(m)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)},\ b\neq 0$$

(n)

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{\sin(x+2)}{|4 \Leftrightarrow x^2|}$$

(o)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x \Leftrightarrow \tan x}{x^2\tan x}$$

(p)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x$$

(q)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x+\sin x}$$

(r)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin((\sin x))}{\sin x}$$

22. Supón que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = A \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = B$$

Calcula en términos de $a$ y $B$ los siguientes límites unilaterales:

(a)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x^3 - x)$$

(b)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x^2 - x^4)$$

(c)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x - \sin x)$$

23. Usa los teoremas sobre límites para obtener:

    (a)

$$\lim_{x\to -1} \frac{\left(2f(x) + g^2(x)\right)^2}{2h(x) - g(x)}$$

    (b)

$$\lim_{x\to -1} \frac{f^2(x)\, g(x)}{\left(2h(x) + 1\right)^3}$$

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to -1} f(x) = 3, \quad \lim_{x\to -1} g(x) = 2, \quad \lim_{x\to -1} h(x) = -1$$

24. Si $\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-5}{(x-2)^2+1} = 3$, prueba que $\lim_{x\to 4} f(x)$ existe y obtén su valor.

25. Supón que $f$ está definida en una vecindad $\mathcal{V}$ de $x_0 = 7$ pero no necesariamente en $x_0$ y que:

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{x-7}{4}\right)^2 \le f(x) \le \frac{1}{2} + \left(\frac{2x-14}{7}\right)^4 \quad \forall\, x \in \mathcal{V} - \{x_0\}$$

    Obtén $\lim_{x\to 7} f(x)$.

26. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ una función tal que

$$\frac{2x-3}{x} < f(x) \le \frac{2x^2 + 8x + 7}{x^2} \quad \forall\, x > 0$$

    Calcula $\lim_{x\to\infty} f(x)$

27. Determina $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $2 < x < 2 + \delta$ entonces $|x^2 + 3x - 4 - 6| < \epsilon$

28. Prueba formalmente que:

    (a)

$$\lim_{x\to -3^-} -x^2 + 2x + 1 = -16$$

    (b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2+1} = 1$$

(c)

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 1, \quad \text{si}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x \Leftrightarrow 3)^2 & \text{si} \quad x < 3 \\ 2 & \text{si} \quad x = 3 \\ |2 \Leftrightarrow x| & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

(d)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \quad \text{si}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow x & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 + x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

29. Prueba:

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad |g(x)| \leq M \quad \forall\ x \neq x_0 \quad (M > 0 \text{ constante})$$

entonces

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\, g(x) = 0.$$

Concluye que:

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

30. Supón que $f$ satisface:

$$|f(x) \Leftrightarrow l| \leq M\, |x \Leftrightarrow x_0|^2, \quad (M > 0 \text{ constante})$$

Prueba formalmente que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$

31. Sea $\epsilon \in (0,1)$ fija. Determina $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ que garantice que si $0 < |x \Leftrightarrow 1| < \delta$ entonces $|\frac{1}{x} \Leftrightarrow 1| < \epsilon$

32. Prueba formalmente que:

(a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 \Leftrightarrow 1} = 1$$

(b)

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{10}{(x \Leftrightarrow 2)^3} = \Leftrightarrow\infty$$

(c)

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{x \Leftrightarrow 1} = 1$$

(d)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 3}{x + 1} = \infty$$

(e)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

(f)

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = \infty$$

33. Define

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ a & \text{si} \quad x = 1 \\ bx-1 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ c & \text{si} \quad x = 2 \\ x^2+dx-3 & \text{si} \quad 2 < x \le 3 \end{cases}$$

Determina el valor de $a$, $b$, $c$, $d$.

34. Define

$$f(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 2x-x^2 & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \\ x^2-bx+4 & \text{si} \quad 2 < x \le 3 \end{cases}$$

Determina el valor de $a$, $b$.

35. Determina los valores de $a$ y $b$ para que la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+bx+3 & \text{si} \quad x < -2 \\ 7 & \text{si} \quad x = -2 \\ (x-a)^2 & \text{si} \quad x > -2 \end{cases}$$

sea continua en **R**.
Traza la gráfica final.

36. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

y sea

$$g(x) = x(1-x^2)$$

Determina todos los puntos en los que $f \circ g$ y $g \circ f$ son discontinuas.

37. Proporciona ejemplos de funciones $f$ y $g$ tales que:

(a) Ni $f$ ni $g$ son continuas en $x_0 = 2$ pero $f+g$, $f-g$, $fG$ son continuas en $x_0$

(b) $g$ es discontinua en $x_0 = 0$, $f$ es discontinua en $g(x_0)$ pero $f \circ g$ es continua en $x_0$.

38. Obtén la forma analítica y traza la gráfica de una función $f$ que posea las siguientes propiedades:

(a)

$$\mathcal{D}(f) = [-4, 4]$$

(b)

$$f(-4) = f(-2) = 1 \quad \text{y} \quad f(2) = f(4) = 2$$

(c) $f$ es continua por la derecha en 2, $f$ es continua sólo por la izquierda en -2, es discontinua en 0 y es continua en todos los demás puntos.

(d)

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = 1$$

39. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ continuas tales que $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$. Demuestra que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

40. Demuestra que

$$x^3 - 19x + 1 \quad \text{y} \quad 21 - 2x^2$$

coinciden en tres y sólo tres valores de $x$.

41. Sea

$$f : [0, 1] \to [0, 1]$$

continua. Usa el Teorema del Valor Medio de Bolzano para probar que existe

$$c \in [0, 1] \quad \text{tal que} \quad f(c) = 1 - c$$

42. Demuestra que todo polinomio cúbico tiene al menos una raiz real.

43. Obtén $\frac{dy}{dx}$ y evalua en $x_0$ si:

(a)

$$y = \left( \frac{1 + x^{-\frac{1}{3}}}{1 + x^{\frac{1}{2}}} \right)^4, \quad x_0 = 1$$

(b)

$$y = \sqrt{(3x^2 + 1)(2x + 2\sqrt{x})}, \quad x_0 = 1$$

44. Si

$$\begin{aligned} u(1) = 2 \quad &, \quad u'(1) = 2 \\ v(1) = 5 \quad &, \quad v'(1) = 0 \end{aligned}$$

Determina:

(a)

$$\left( \frac{2u + \sqrt{v}}{u^2 + 4v} \right)' (1)$$

(b)

$$\left( \frac{\sqrt{u} + 2uv}{u + 2v} \right)' (1)$$

45. Supón que

$$f'(3) = 2,\ f''(3) = 1,\ g(0) = 3,\ g'(0) = 1,\ g''(0) = 0$$

calcula $(f \circ g)''(0)$. Si además $f(3) = \Leftrightarrow 2$, obtén $\left(f^3\right)''(3)$.

46. La función $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $P(1,2)$ y es tangente a la recta $y = x$ en el origen. Determina $a$, $b$, $c$.

47. Sea $f$ derivable en $x_0$ y $f(x_0) = 0$. Demuestra que si $g$ es continua en $x_0$ (sólo continua!) entonces $fg$ es derivable en $x_0$ y $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)$. Sugerencia: usa la definición de derivada. Concluye que:

$$x|x|,\ x^{1/3}\sin x,\ x^{2/3}\sin x,\ (1 \Leftrightarrow \cos x)\sqrt{|x|}$$

son todas derivables en $x_0 = 0$ y determina el valor de sus derivadas en $x_0$.

48. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{1-\cos x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Usa la definición de derivada para probar que $f'(0) = frac12$.

49. Para que valores de $a,\ m,\ b$ se tiene que la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 3x + a & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ mx + b & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Satisface las hipótesis del Teorema del Valor Medio ?.

50. Sean

$$f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$$

continuas y derivables en $(a,b)$. Supón que

$$f(a) = g(a) \quad \text{y que} \quad f(b) = g(b)$$

Demuestra que existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = g'(c)$.

51. Sea

$$f : [a,b] \to \mathbf{R}$$

continua y derivable en $(a,b)$. Si $f(b) < f(a)$ entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) < 0$.

52. Sea

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

derivable. Supón que existe $c \in \mathbf{R}$ tal que $f'(x) < 0$ si $x \in (\Leftrightarrow\infty, c)$ y $f'(x) > 0$ si $x \in (c, \infty)$. Prueba que $f(x) \geq f(c)\ \forall\ x \in \mathbf{R}$ (aplica TVM).

53. Sea

$$f : [\Leftrightarrow 8, 27] \to \mathbf{R}$$

definida por $f(x) = x^{2/3}$. Muestra que la conclusión del Teorema del Valor Medio no se satisface. Por qué?

54. Sean

$$f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$$

continuas y derivables en $(a, b)$. Si $f(a) = g(a)$ y $f'(x) < g'(x)\ \forall\ x \in \mathbf{R}$ entonces prueba que $f(x) < g(x)\ \forall\ x \in [a, b]$

55. Sea

$$f : [a, b] \to \mathbf{R}$$

continua y derivable en $(a, b)$. Supón que $f'(x) \neq 0\ \forall\ x \in (a, b)$, demuestra que $f$ es inyectiva.

56. Sea

$$f : [a, b] \to \mathbf{R}$$

continua y derivable en $(a, b)$ y tal que $|f'(x)| \leq M\ \forall\ x \in (a, b),\ M > 0$. Demuestra que

$$|f(x) \Leftrightarrow f(y)| \leq M|x \Leftrightarrow y|\ \forall\ x, y \in [a, b]$$

57. Prueba:

   (a) Sea $f(x) = \frac{1}{x}$ y $0 < a < b$ (ó $a < b < 0$), entonces

   $$f(b) \Leftrightarrow f(a) = f'(c)(b \Leftrightarrow a) \quad \text{si y sólo si} \quad c = \sqrt{ab}$$

   (b) Sea $f(x) = Ax^2 + Bx + C,\ A \neq 0$, entonces

   $$f(b) \Leftrightarrow f(a) = f'(c)(b \Leftrightarrow a) \quad \text{si y sólo si} \quad c = \frac{a+b}{2}$$

58. Sea $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ continua y derivable en $(a, b)$ y tal que $f'(x) \neq 0\, \forall\, x \in (a, b)$ y $f(a)\, f(b) < 0$. Prueba que existe $c \in (a, b)$ único con $f(c) = 0$.

59. Usa el Teorema de Rolle para probar que la ecuación $\tan x = 1 \Leftrightarrow x$ tiene solución en $(0, 1)$. (*Sugerencia:* considera $f(x) = (x \Leftrightarrow 1)\operatorname{sen} x$ y calcula $f(0)$, $f(1)$, $f'(x)$)

60. Sea $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ continua y derivable dos veces en $(a, b)$. Supón que $f$ tiene tres raices en $[a, b]$. Prueba que $f'$ tiene al menos dos raices en $(a, b)$ y que $f''$ tiene al menos una raíz en $(a, b)$.

61. Encuentra las coordenadas de los puntos en donde la gráfica de la relación $x^2 + y^3 = 2xy$ tiene una tangente horizontal.

62. Halla las coordenadas de los puntos en donde la curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ intersecta al eje $\mathcal{X}$ y prueba que las rectas tangentes a la curva en esos puntos son paralelas. Obtén también los puntos donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dy} = 0$$

63. Encuentra la ecuación de la recta tangente y la de la recta normal a la gráfica de la curva $2xy + \pi \operatorname{sen} y = 2\pi$ en el punto $P(1, \pi/2)$

64. Encuentra la ecuación de la recta tangente y la de la recta normal a la gráfica de la curva $x\operatorname{sen}(2y) = y\cos(2x)$ en el punto $P(\pi/4, \pi/2)$

65. Verifica que las gráficas de las curvas siguientes son perpendiculares en $P(1,2)$:

$$\begin{aligned} 16x^2 - 9y^2 &= 20 \\ 9x^2 + 4y^2 &= 25 \end{aligned}$$

Además, halla las ecuaciones de las rectas tangentes en ese punto e identifica las curvas.

66. La recta normal a la curva $x^2 + 2xy = 3y^2$ a través del punto $P(1,1)$ intersecta a la curva en otro punto. Determina las coordenadas del otro punto.

67. Calcula $\frac{d^2y}{dx^2}$ en el punto indicado:

(a)

$$y^3 + y = 2\cos x,\ \ P(0,1)$$

(b)

$$x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 4,\ \ P(8,8)$$

(c)

$$x^2y^2 = 9,\ \ P(-1,3)$$

(d)

$$y^2 - 2x - 4y = 1,\ \ P(-2,1)$$

68. Una partícula se mueve en el plano $xy$ sobre la curva $y = x^{\frac{1}{2}}$ en el primer cuadrante de tal modo que la distancia desde el origen aumenta a razón de una unidad por segundo. Determina la razón en la que cambian la abscisa y la ordenada en el instante en que $x = 3$

69. Una partícula se mueve sobre la gráfica de $y = x^2$ en el plano $xy$ a una velocidad constante de 10 cm/s . Denota por $\theta$ el ángulo que forma la recta que une al origen con $P(x, x^2)$. Determina como cambia $\theta$ respecto al tiempo en el instante en que $x = 3$.

70. En un tanque en forma de cono circular recto invertido se vierte agua a la razón de 720 $\text{cm}^3$/min. El tanque tiene una altura de 200 cm y el radio en la parte superior es de 60 cm. Cuán rápido sube el nivel de agua cuando el tanque está a un octavo de su capacidad y cuanto se tarda en llenar el tanque?. El volumen de un cono circular recto de altura $h$ y de radio $r$ es de $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

71. Arena cae sobre un montículo de forma cónica a una tasa constante de 10 $\text{cm}^3$/s. Si la altura del cono siempre es tres octavos del díametro de la base, determina:

    (a) Cómo cambia la altura del cono.

    (b) Cómo cambian la altura y el radio del cono en el instante en que la altura del cono ha alcanzado los 60 cm.

72. El área superficial lateral $S$ de un cono circular recto se relaciona con el radio de la base $r$ y la altura $h$ de la manera siguiente:

$$S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

(a) Cómo se relaciona $\frac{dS}{dt}$ con $\frac{dr}{dt}$ si $h$ no cambia respecto al tiempo $t$.

(b) Cómo se relaciona $\frac{dS}{dt}$ con $\frac{dr}{dt}$ y $\frac{dh}{dt}$ si $r$ y $h$ cambian rescto al tiempo $t$.

73. Supón que la relación de demanda de un cierto producto es $p + 2q + pq = 38$ en donde $q$ se mide en miles de unidades y $p$ es el precio en dólares por unidad. Supón además que el precio $p$ (y en consecuencia la demanda $q$) cambian semanalmente, es decir $p$ es una función del tiempo.

(a) A qué ritmo está cambiando la demanda si el precio está disminuyendo a razón de 0.40 dólares por semana, a un nivel de demanda de $q = 4$, ?

(b) Qué ocurre ahora si el precio está aumentando a razón de 0.20 dólares por semana al mismo nivel de demanda?

74. Traza con todo detalle la gráfica de las siguientes funciones $y = f(x)$ indicando cuando corresponda:

(a) Dominio y rango. Intersecciones con los ejes.

(b) Máximos y mínimos relativos (las coordenadas) así como los puntos singulares (coordenadas).

(c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(d) Intervalos de concavidad positiva y negativa. Puntos de inflexión (coordenadas).

(e) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

(f) Cálculo de límites relevantes.

(g) Términos dominantes.

Si:

(a)

$$f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 \Leftrightarrow 1$$

(b)

$$f(x) = 3x^4 \Leftrightarrow 4x^3 + 6$$

(c)

$$f(x) = (x^2 \Leftrightarrow 1)^5$$

(d)

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$$

(e)

$$f(x) = \frac{x^2 \Leftrightarrow 3x}{x+1}$$

(f)

$$f(x) = \frac{x^3 + x \Leftrightarrow 2}{x \Leftrightarrow x^2}$$

(g)

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{2x}$$

(h)

$$f(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}}$$

(i)

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

(j)

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} (2 \Leftrightarrow x)^{\frac{3}{2}}$$

75. Traza la gráfica de una función continua en su dominio y que cumpla con todas las siguientes propiedades:

   (a) $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R} \setminus \{\Leftrightarrow 1\}$
   (b) $f'(x) > 0 \quad \text{si} \quad x \in (\Leftrightarrow \infty, \Leftrightarrow 1) \cup (0, \infty)$
   (c) $f$ es decreciente en (-1,0)
   (d) El ínico punto crítico es $x = 0,\ f(0) = 2$
   (e) $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \infty = \lim_{x \to -1^+} f(x)$
   (f) $f$ tiene asíntota oblicua $y = x + 1$
   (g) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$

76. Halla el área máxima y la longitud correspondiente de los catetos que puede tener un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 5 unidades.

77. Determina las coordenadas del punto $(x_0, y_0)$ perteneciante a la gráfica del semicírculo $y = \sqrt{16 \Leftrightarrow x^2}$ más próximo a $(1, \sqrt{3})$

78. Sean $a, b \geq 0$ tales que $a + b = 20$. Maximiza y minimiza:

   (a) $ab$
   (b) $a^2 + b^2$
   (c) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

(d) $a + \sqrt{b}$

79. Determina las dimensiones que debe tener una caja rectangular con tapas cuadradas que minimicen el costo de fabricación si el material de los costados cuesta el cuádruple del de las tapas y si el volumen debe ser de 1 $m^3$.

80. Se va a construir un campo deportivo de forma rectangular de largo $x$ y rematado en cada extremo por un semicírculo de radio $r$. Si el perímetro total debe ser de 400 m, determinar las dimensiones que maximicen el área.

81. Sea $m \in (1, \infty)$ constante. Prueba que (desigualdad de Bernoulli)

$$(1+x)^m \geq 1 + mx \quad \forall\ x \geq -1$$

y obtén el mínimo de

$$f(x) = (1+x)^m - mx \quad \text{en} \quad [-1, \infty)$$

82. Prueba que la suma de un número positivo y su recíproco es mayor o igual que 2 y que es igual a 2 si y sólo si el número es igual a 1.

83. Hallar el menor valor de aquella constante positiva $m$ tal que haga:

$$mx + \frac{1}{x} - 2 \geq 0 \quad \forall \quad x > 0$$

84. Obtén el valor máximo de $f(x) = \cot x - \sqrt{2} \csc x$ en $(0, \pi)$

85. Una agencia de viajes ofrece el siguiente plan para un tour sobre las siguientes bases: Para un grupo de 50 personas (grupo mínimo) el costo es de \$200 por persona. Por cada persona adicional y hasta llegar a 80 (grupo máximo) la tarifa de todas las personas se reduce en \$2. Si el costo fijo de la agencia es de \$6000 y de \$32 por cada viajero, determina el tamaño del grupo que maximiza la utilidad y cuál es ésta.

86. Una librería puede obtener un cierto libro a un costo de \$3 por cada uno. La librería ha estado vendiendo el libro a \$15 por ejemplar y a esate precio vende 200 ejemplares por mes. Con objeto de estimular las ventas, la librería está planeando bajar ese precio y estima que por cada dólar de reducción en el precio del libro se venderán 20 libros más al mes.

    (a) A qué precio debe venderse el libro para generar el mayor beneficio posible, y cuál es éste.

    (b) Qué cantidad adicional de libros es vendida al nuevo precio ?

87. Un estudio de productividad efectuado en una fábrica, indica que un trabajador medio que inicia su labor a las 8:00 AM habrá producido $Q(t) = -t^3 + 9t^2 + 12t$ unidades de producto $t$ horas después del inicio.

    (a) En que momento de la mañana es el trabajador más eficiente ?.
    Se define el momento de *eficiencia máxima* aquél en el que el ritmo de producción es máximo, también conocido como el *punto de beneficios decrecientes*

    (b) Proporciona un argumento que justifique los dos nombres dados a ese punto.

88. Cada máquina de una maquiladora puede producir 50 unidades por hora. El costo de puesta a punto es de 80 dólares por máquina, mientras que el costo de operación es de 5 dólares por hora para todas las máquinas. Cuántas máquinas deben usarse para producir 8000 unidades al menor costo posible y cuál es este costo mínimo ?.

89. El cierta fábrica el costo de puesta a punto es proporcional al número de máquinas empleadas y el costo de operación es inversamente proporcional al número de máquinas empleadas. Demuestra que el costo total de operación es mínimo cuando el costo de puesta a punto es igual al costo de operación.

90. Halla la ecuación de la curva en el plano $xy$ que pasa a través de $P(1,0)$ y cuya pendiente en cada punto es $3\sqrt{x}$. Traza su gráfica.

91. Halla $f(x)$ tal que:

    (a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + x, \quad (x > 0); \quad y = 1$ si $x = 2$

    (b) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $\frac{dy}{dx} = 2; \quad y = 2$ si $x = 0$

    (c) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$, $\frac{dy}{dx} = 1$ si $x = 1; \quad y = 1$ si $x = 1$

92. Calcula los siguientes límites como integrales definidas y calcula su valor:

    (a)
    $$\lim_{n\to\infty} \left( \frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \cdots + \frac{n^2}{n^3} \right)$$

    (b)
    $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{ 3\left(\frac{k}{n}\right)^2 \Leftrightarrow 7\left(\frac{k}{n}\right) + 2 \right\} \left(\frac{1}{n}\right)$$

    (c)
    $$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen } \left(\frac{\pi}{n}\right) + \cdots + \text{sen } \left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)}{n}$$

93. Escribe las siguientes integrales definidas como el límite de sumas de Riemann así como en el ejercicio anterior:

    (a)
    $$\int_0^1 \sqrt{1 \Leftrightarrow s^2}\, ds$$

    (b)
    $$\int_0^1 \cos(\pi\theta + 2)\, d\theta$$

    (c)
    $$\int_2^3 (3t^2 + 2t \Leftrightarrow 11)^{\frac{3}{2}}$$

94. Se sabe que

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = 5, \quad \int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 3 \quad \text{y} \quad \int_{2}^{4} g(x)\,dx = -1$$

calcular:

(a)

$$\int_{2}^{4} (7f(x) + \sqrt{2}g(x))dx$$

(b)

$$\int_{4}^{2} (-5f(x) + 2x)dx$$

95. Prueba que el valor de

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}\,dx$$

no puede exceder $\sqrt{2}\pi$ ni ser menor que $\frac{\pi}{2}$.

96. Sin calcular la integral y usando solamente métodos geométricos demuestra que

$$\frac{1}{2} < \int_{1}^{2} \frac{dx}{x} < \frac{3}{4}$$

97. Calcula $\int_a^b |t|\,dt$ en los siguientes casos:

(a) $a < b < 0$

(b) $a < 0 < b$

(c) $0 < a < b$

98. Supón que

(a) $f$ es continua y que $\int_1^2 f(x)\,dx = 4$. Prueba que existe $c \in [1,2]$ tal que $f(c) = 4$.

(b) $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ son continuas ($a < b$) y que $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = 0$. Prueba que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$. (Usar el TVM para integrales)

99. Calcula

(a)

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \tan t\,dt$$

(b)

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \frac{du}{u + \sqrt{u^2+1}}$$

100. Evalua las siguientes integrales definidas:

(a)
$$\int_1^4 \frac{(1+\sqrt{u})^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{u}} du$$

(b)
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(1+7s)^2}} ds$$

(c)
$$\int_0^2 \frac{2t^3}{\sqrt{t^4+9}} dt$$

(d)
$$\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{u}}{\sqrt{u}} du$$

(e)
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan\theta}{\sqrt{2\sec\theta}} d\theta$$

(f)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} v \cos v}{\sqrt{1+3\operatorname{sen}^2 v}} dv$$

(g)
$$\int_{\frac{\pi^2}{25}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x\operatorname{sen}\sqrt{x}}} dx$$

(h)
$$\int_{\pi}^{3\pi} \cot^2\left(\frac{a}{6}\right)\, da$$

101. Donde está el error:
$$\int_0^{\pi} \sec^2 t\, dt = \int_0^{\pi} \frac{d}{dt} \tan t\, dt = \tan t|_0^{\pi} = 0\ ?$$

102. Sea
$$y = x^2 + \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Prueba que $y$ satisface:

(a) $y(1) = 1$

(b) $y'(1) = 3$

(c) $y''(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}$

103. Resuelve:

(a) Sea $T(x) = \int_0^x \frac{ds}{1+s^2}$ demostrar que $T : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es creciente y que $P(0,0)$ es su único punto de inflexión.

(b) Supón que $x = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+4t^2}}$ Demustra que $y''$ es proporcional a $\frac{y}{y'}$. (Usa la relga de Leibniz)

104. Calcula $F'(x)$ si:

(a)

$$F(x) = \int_x^3 \sqrt{1+3u^7}\, du$$

(b)

$$F(x) = \int_{\cos x}^{\operatorname{sen} x} \frac{dt}{1+t^2}$$

(c)

$$F(x) = \left( \int_0^x \sqrt{1+s^2}\, ds \right)^2$$

105. Halla $f(4)$ si:

(a)

$$\int_0^{x^2} f(t)\, dt = x\cos(\pi x)$$

(Dos soluciones)

(b)

$$\int_0^{f(x)} t^2\, dt = \pi\cos(\pi x)$$

(c)

$$\int_{f(x)}^0 \sqrt{t}\, dt = \pi\cos(\pi x)$$

106. El área de una región en el plano $xy$ entre el eje $\mathcal{X}$ y la gráfica de la función continua no negativa $y = f(x)$ entre $x = 1$ y $x = b$ es igual $\sqrt{b^2+1} \Leftrightarrow \sqrt{2} \quad \forall\ b > 1$. Halla $f(x)$.

107. Supón que:

$$F(t) + C = \int f(t)\, dt,\ C \quad \text{constante}$$

demuestra que:

$$\int f(at+b)\, dt = \frac{1}{a} F(at+b) + C, \quad a \neq 0$$

108. Sea $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ continua. Prueba:

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \Leftrightarrow \int_0^1 f(1 \Leftrightarrow t)\,dt$$

109. Sea $F(x)$ una primitiva de $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ $(x > 0)$. Expresa

$$\int_1^3 \frac{\operatorname{sen}(2t)}{t}\,dt$$

en términos de $F$.

110. Obtén el área de la región limitada por:

(a) La curva $y^2 = 4x$ y la recta $4x \Leftrightarrow 3y = 4$

(b) La recta $y \Leftrightarrow x \Leftrightarrow 4 = 0$ y la curva $y = x^2 \Leftrightarrow 2$

(c) Las curvas $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ entre $\pi/4$ y $5\pi/4$

(d) La curva $y = \sqrt{x}$ y la recta $x + y = 6$

(e) Las curvas $y = \cos(\pi x/2)$ y $y = 1 \Leftrightarrow x^2$ en el primer cuadrante.

(f) Las curvas $x = y^2 \Leftrightarrow 1$ y $x = |y|\sqrt{1 \Leftrightarrow y^2}$

(g) Las curvas $x = 3y \Leftrightarrow y^2$ y la recta $x + t = 3$

(h) Las curvas $x = \tan^2 y$ y $x = \Leftrightarrow \tan^2 y$ en $\Leftrightarrow \pi/4 \leq y \leq \pi/4$