Cálculo diferencial e integral II

Ejercicios del curso

I. Los ejercicios con $\star$ **no** serán tomados en cuenta para los exámenes parciales; sin embargo, se recomienda trabajarlos.

II. Cada ejercicio está etiquetado de tal como que corresponden a los temas **I**, **II**, **III**, **IV** y **V** del temario; los ejercicios que no estén etiquetados quiere decir que no son abordados explícitamente en el temario del curso.

$\star$1 Muestra las siguientes proposiciones:

(a) $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$.

(b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

(c) $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$.

(d) $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n}) = \dfrac{1-x^{2n+1}}{1-x}$.

Ayuda: considera usar inducción matemática.

2. **(I)** Sea $\alpha \neq -1$ y la función

$$\varphi(x) = \int_1^x u^\alpha \mathrm{d}u\,, \quad x > 1\,.$$

(a) Prueba que si q_1 y q_2 son dos números racionales tales que $q_1 \leq \alpha \leq q_2$, entonces

$$\int_1^x u^{q_1}\mathrm{d}u \leq \varphi(x) \leq \int_1^x u^{q_2}\mathrm{d}u\,.$$

(b) A partir del inciso anterior, muestra que $\varphi(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}$ cuando $q_{1,2} \to \alpha$.

(c) Demuestra que, para $a, b \in \mathbb{R}$, se obtiene

$$\int_a^b u^\alpha \mathrm{d}u = \varphi(b) - \varphi(a)\,.$$

Ayuda: considera los casos donde $0 < x < 1$ *y* $x < 0$.

3. **(I)** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función monótona positiva. Suponiendo que $\alpha = f(a)$ y $\beta = f(b)$, muestra que

$$\int_\alpha^\beta f^{-1}(y)\mathrm{d}y = b\beta - a\alpha - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Ayuda: utiliza la interpretación geométrica de la integral.

4. **(I)** Prueba que si $f(x)$ es continua y es tal que

$$f(x) = \int_0^x f(u)\mathrm{d}u\,,$$

entonces $f(x) \equiv 0$.
Ayuda: utiliza el Teorema fundamental del cálculo.

5. **(I)** Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas definidas en el intervalo $[a, b]$. Demuestra la desigualdad de Cauchy–Schwarz para integrales

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x \int_a^b g(x)^2\mathrm{d}x\,.$$

Ayuda: toma en cuenta que $(f(x) - \lambda g(x))^2 \geq 0$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. **(I)** Evaluar los siguientes límites:

$$\text{(a)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

$$\text{(b)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[1 + \sec^2\left(\frac{\pi}{4n}\right) + \sec^2\left(\frac{2\pi}{4n}\right) + \cdots + \sec^2\left(\frac{n\pi}{4n}\right)\right].$$

Ayuda: expresa los límites como sumas de Riemann.

*7 **(I)** Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$. Muestra que si

$$\log(x) = \lim_{n\to\infty} n\left[(x)^{1/n} - 1\right], \quad \text{entonces} \quad \log(xy) = \log(x) + \log(y)\,.$$

Ayuda: utiliza las propiedades de los límites.

8. Considera que $\log(x) = \int_1^x \mathrm{d}u/u$.
   (a) Verifica que $\log(1 + x) = \int_0^x \mathrm{d}u/(1 + u)$, donde $x > -1$.
   (b) Muestra que si $x > 0$, entonces

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1 + x) < x\,.$$

   (c) Prueba que si $0 < x < 1$, el resultado del inciso anterior se generaliza como

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{2n}}{2n} < \log(1 + x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,.$$

   Ayuda: toma en cuenta la progresión geométrica.

9. **(I,II)** Sea $x > 0$ y la función dada por

$$f(x) = \int_1^x \frac{\log u}{1 + u}\mathrm{d}u\,.$$

Calcula la expresión $f(x) + f(1/x)$, de tal modo que $f(2) + f(1/2) = (\log 2)^2/2$.

10. **(I,II)** Sea $x > 0$ y la función definida por

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^u}{u} \mathrm{d}u \,.$$

   (a) Encuentra los valores de $x > 0$ tales que $\log x \leq f(x)$.
   (b) Muestra que

$$\int_1^x \frac{e^u}{u+\alpha} \mathrm{d}u = e^{-\alpha} \left(f(x+\alpha) - f(1+\alpha) \right) \,, \quad \text{donde} \quad \alpha > 0 \,.$$

11. **(I,II)** Encuentra a $f(x)$ una función continua y no constantemente cero en todo $x \in \mathbb{R}$ tal que satisface

$$f(x)^2 = \int_0^x f(u) \frac{\operatorname{sen} u}{\beta + \cos u} \mathrm{d}u \,, \quad \text{donde} \quad \beta > 1 \,.$$

12. **(I)** Sea $f(x)$ una función tal que $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $u = u(t)$ una función continua arbitraria. Demuestra que

$$f\left(\frac{1}{a} \int_0^a u(t) \mathrm{d}t \right) \leq \frac{1}{a} \int_0^a f(u(t)) \mathrm{d}t \,, \quad \text{donde} \quad a > 0.$$

   Ayuda: considera la definición de integral según Riemann.

13. **(I)** Sea $p \in \mathbb{R}$. Muestra que si $f(x)$ es una función continua tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_0^p f(x) \mathrm{d}x = \int_a^{a+p} f(x) \mathrm{d}x \,, \quad \text{para todo } a \in \mathbb{R} \,.$$

14. **(I)** Sea $f(x)$ una función continua en $[-a, a] \subset \mathbb{R}$. Prueba que:
   (a) Si $f(x)$ es par, entonces $\int_{-a}^a f(u) \mathrm{d}u = 2 \int_0^a f(u) \mathrm{d}u$.
   (b) Si $f(x)$ es impar, entonces $\int_{-a}^a f(u) \mathrm{d}u = 0$.

15. **(I)** Sea $y = a^x$, donde $a > 0$. Por medio del Teorema fundamental del cálculo, muestra que

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\log(a)} + k \,, \quad \text{donde} \quad k \in \mathbb{R} \,.$$

16. **(I, II)** Sea $x = \tan(y)$, donde $|y| < \pi/2$. Por medio del Teorema de la función inversa y el Teorema fundamental del cálculo, muestra que

$$y = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \quad \text{y, en consecuencia, que} \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{4} \,.$$

17. **(I–III)** Encuentra la familia de primitivas para cada integral:

$$\text{(i)} \int \left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)\mathrm{d}x\,, \quad \text{(ii)} \int 3^x e^x \mathrm{d}x\,, \quad \text{(iii)} \int \frac{2x+3}{2x+1}\mathrm{d}x\,,$$

$$\text{(iv)} \int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\,, \quad \text{(v)} \int \left(e^{x/a}+1\right)e^{x/a}\mathrm{d}x\,, \text{ donde } a\neq 0\,, \quad \text{(vi)} \int \frac{\mathrm{d}x}{3+2^x}\,,$$

$$\text{(vii)} \int a^{\operatorname{sen}(x)}\cos(x)\mathrm{d}x\,, \quad \text{(viii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x\left(4+\log^2(x)\right)}\,, \quad \text{(ix)} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}\,,$$

$$\text{(x)} \int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{senh}^2(x)+\cosh^2(x)}\,, \quad \text{(xi)} \int \sqrt{3-2x-x^2}\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{(xii)} \int \sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x\,,$$

$$\text{(xiii)} \int \frac{\operatorname{senh}(x)\cosh(x)}{\operatorname{senh}^2(x)+\cosh^2(x)}\mathrm{d}x\,, \quad \text{(xiv)} \int \log^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\,, \quad \text{(xv)} \int \frac{\operatorname{arc\,sen}(x)+x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\,,$$

$$\text{(xvi)} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)(x+b)}\,, \quad \text{(xvii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x+2)(x+3)}\,, \quad \text{(xviii)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)^2}\,.$$

18. **(II, III)** Calcula la primitiva

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,, \quad a\neq b\,.$$

Ayuda: considera alguno de estos cambios de variable $x=(b-a)\operatorname{sen}^2(u)+a$ *o* $x=(b-a)\cos^2(u)+a$ *y verifica si* $\operatorname{sen}(u)$ *o* $\cos(u)$*, respectivamente, tienen inversa.*

19. **(III)** Sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tales que $|\alpha|\neq|\beta|$. Muestra que

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{sen}(\alpha x)\operatorname{sen}(\beta x)\mathrm{d}x=0\,.$$

Ayuda: utiliza la identidad trigonométrica adecuada.

20. **(III)** Prueba que

$$(-1)^n\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n\mathrm{d}x=\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}\,.$$

Ayuda: toma en cuenta que el factorial de $n\in\mathbb{N}$ *está dado por* $n!=1\cdot 2\cdots(n-1)n$.

21. **(II)** Demuestra las identidades: $\operatorname{senh}(x)\pm\operatorname{senh}(y)=2\operatorname{senh}\left(\frac{x\pm y}{2}\right)\cosh\left(\frac{x\mp y}{2}\right)$.

22. **(II)** Encuentra en valor de $\cosh(\alpha+\beta)$, si $\operatorname{senh}\alpha=4/3$ y $\cosh\beta=3/4$.

23. **(II)** Si $f(x)=\coth x$, entonces $f^{-1}(x)=\operatorname{arccoth} x$. Prueba que

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\,, \quad \text{para} \quad |x|>1 \quad \text{y} \quad \int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\operatorname{arccoth} x+k\,,\ k\in\mathbb{R}\,.$$

24. **(I, II)** Muestra que

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{|x|\sqrt{a^2\pm x^2}}=\begin{cases} -\dfrac{1}{a}\operatorname{arccsch}\left(\dfrac{x}{a}\right)+k\,, & 0<x<1\,,\\[2ex] -\dfrac{1}{|a|}\operatorname{arcsech}\left(\dfrac{x}{a}\right)+k\,, & x\neq 0\,,\end{cases} \qquad \text{donde } k\in\mathbb{R} \text{ y } a\neq 0\,.$$

Ayuda: utiliza las mismas ideas que en el ejercicio 16.

25. **(III)** Deduce la fórmula

$$\int \cos(nx)\cos(mx)\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\cos\left((n+m)x\right)}{n+m} + \dfrac{\cos\left((n-m)x\right)}{n-m}\right] + k\,, & n \neq m\,, \\ \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\cos\left(2nx\right)}{2n} + x\right] + k\,, & n = m\,, \end{cases} \qquad \text{donde } k \in \mathbb{R}\,.$$

26. **(I)** Prueba que

$$\int_0^x \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u = \int_0^x f(u)(x-u)\mathrm{d}u\,.$$

Ayuda: utiliza el Teorema fundamental del cálculo.

27. **(I, II)** Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[0,1]$. Mostrar que

$$f(0) = \lim_{x\to 0} x\int_x^1 \frac{f(u)}{u^2}\mathrm{d}u\,.$$

28. **(II)** Evaluar los siguientes límites:

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right]\,,\quad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^{1/x^2}\,,\quad \text{(iii)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^{1/x^2}\,.$$

29. **(I, II)** Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Determina los valores de a y b de tal modo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{ax-\operatorname{sen}(x)}\int_0^x \frac{u^2}{\sqrt{b+u}}\mathrm{d}u = 1\,.$$

30. **(II)** Supongamos que se tiene una masa suspendida por una cuerda y es sujeta a una fuerza de vibración periódica. El desplazamiento al tiempo t está dado por

$$y(t) = \frac{g}{\omega_1^2-\omega_2^2}\left(\operatorname{sen}(\omega_1 t) - \operatorname{sen}(\omega_2 t)\right)\,,$$

donde g es la aceleración de la gravedad y $\omega_{1,2}$ son dos frecuencias de vibración distintas. Determina la posición para todo $t > 0$ cuando $\omega_1 - \omega_2 \to 0$.

⋆31 **(III) Producto de Wallis**. Este producto es especialmente relevante en la deducción de la Fórmula de Stirling[1], la cual es esencial en Estadística y la Teoría de probabilidad.

(a) Deduce la siguiente fórmula:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n(x)\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{n-2}(x)\mathrm{d}x\,,\quad \text{para } n > 1\,.$$

[1] Esta fórmula corresponde a una aproximación asintótica de $n!$ en términos de funciones elementales, en otras palabras:

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi}\,n^{n+1/2}e^{-n}} \to 1\,,\quad \text{cuando}\quad n\to\infty\,.$$

(b) Utilizando la fórmula del inciso anterior, muestra que se satisface la identidad

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots\frac{2m\cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)}\frac{\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2m}(x)\mathrm{d}x}{\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2m+1}(x)\mathrm{d}x}, \quad \text{donde } m\in\mathbb{N}\,.$$

(c) Verifica que, como $0<\operatorname{sen}(x)<1$ para $0<x<\pi/2$, entonces

$$0<\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2m+1}(x)\mathrm{d}x \le \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2m}(x)\mathrm{d}x \le \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2m-1}(x)\mathrm{d}x$$

y, consecuentemente,

$$1\le \frac{\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2m}(x)\mathrm{d}x}{\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^{2m+1}(x)\mathrm{d}x}\le 1+\frac{1}{2m}\,.$$

(d) A partir de los resultados en los incisos anteriores, concluye que

$$\lim_{m\to\infty}\frac{(m!)^2 2^{2m}}{(2m)!\sqrt{m}} = \sqrt{\pi}\,.$$

32. **(III)** Encuentra los valores de $\mu\in\mathbb{R}$ para los cuales convergen las integrales

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}}{1+x}\mathrm{d}x \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^\mu}\mathrm{d}x\,.$$

33. **(I, III)** Sean $\alpha,\beta>0$. Se tiene que $\int_a^\infty f(x)/x\mathrm{d}x$ converge para cualquier valor $a>0$ y $f(x)\to L$ cuando $x\to 0$.

(a) Prueba que

$$\int_a^\infty \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}\mathrm{d}x = L\log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+\int_{a\alpha}^{a\beta}\frac{f(x)-L}{x}\mathrm{d}x\,.$$

Ayuda: utiliza las propiedades de la integral y los cambios de variable adecuados.

(b) A partir del resultado anterior, concluye que

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}\mathrm{d}x = L\log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\,.$$

(c) Si $\int_a^b f(x)/x\mathrm{d}x$ converge para cualesquiera valores $a,b>0$, $f(x)\to L$ cuando $x\to 0$ y $f(x)\to M$ cuando $x\to\infty$, demuestra que

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}\mathrm{d}x = (L-M)\log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\,.$$

Ayuda: utiliza las ideas de los incisos anteriores.

⋆34 **(III)** La definición según Legendre de la función Gama está dada por

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\,.$$

(a) Encuentra los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $\Gamma(x)$ está definida, i. e. la integral es convergente.
(b) Muestra que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ y que si $x = n \in \mathbb{N}$, entonces $\Gamma(n+1) = n!$.
(c) Deduce las siguientes representaciones:

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{\infty} u^{2x-1}e^{-u^2}\mathrm{d}u \quad \text{y} \quad \Gamma(x) = \int_0^1 \left[\log\left(\frac{1}{u}\right)\right]^{x-1}\mathrm{d}u\,.$$

Ayuda: haz los cambios de variable adecuados.
(d) Muestra que si $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(ax^b\right) = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b-n+1)}ax^{b-n}\,;$$

si suponemos que $n = 1/2$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}^{1/2}}{\mathrm{d}x^{1/2}}\left(x^2\right) = \frac{8\sqrt{x^3}}{3\sqrt{\pi}}\,.$$

Ayuda: considera que $\Gamma\left(1/2\right) = \sqrt{\pi}$.

35. **(III, IV)** Supongamos que se tiene un circuito eléctrico cuyo voltaje e intensidad eléctrica están dados por $V(t) = V_0\,\mathrm{sen}(\omega t)$ e $I(t) = I_0\,\mathrm{sen}\left(\omega t - \pi/2\right)$, donde $V_0 > I_0 > 0$. La potencia media se encuentra por medio de

$$\frac{1}{T}\int_0^T V(t)I(t)\mathrm{d}t\,,$$

donde $T > 0$ es el período del voltaje de la intensidad. Determina T en términos de la frecuencia $\omega > 0$ y la potencia media en términos de ω, V_0 e I_0.

36. **(IV)** Considera las curvas definidas por $y_1 = f_1(x)$ y $y_2 = f_2(x)$, donde

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } 0 < x \leq 1\,, \\ 0\,, & \text{si } x = 0\,, \end{cases} \quad \text{y} \quad f_2(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } 0 < x \leq 1\,, \\ 0\,, & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

(a) Muestra que ambas curvas son continuas.
(b) Determina qué curva tiene longitud finita y cuál no.

37. **(II, IV)** Sean las funciones $f(x) = \cosh(x)$ y $g(x) = \mathrm{senh}(x)$ restringidas al intervalo $[a, b]$, donde $a < 0 < b$. Encuentra los volúmenes de revolución de: (i) $f(x)$, (ii) $g(x)$, (iii) $f(x) \pm g(x)$, (iv) $|g(x)|$, (v) $g(x)/f(x)$.

38. **(III, IV)** Las ecuaciones ecuaciones paramétricas de la cicloide son: $x(t) = a(t - \mathrm{sen}(t))$ y $y(t) = a(1 - \cos(t))$, donde $0 \leq t \leq t_{\mathrm{f}}$ y $a \neq 0$. Considera que la longitud de arco está dada por

$$s(t_{\mathrm{f}}) = \int_0^{t_{\mathrm{f}}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t\,, \quad \text{donde} \quad (\triangle)' = \frac{\mathrm{d}\triangle}{\mathrm{d}t}\,.$$

(a) Prueba que $s(2\pi n) = 8na$, donde $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Sea $n = 1$. Verifica que el cálculo del área de la superficie de revolución A_s y del momento de inercia I_x tienen los valores

$$A_s := 2\pi \int_0^{s(2\pi)} y(t)\mathrm{d}s = \frac{64\pi}{3}a^2 \quad \text{y} \quad I_x := \int_0^{s(2\pi)} y(t)^2\mathrm{d}s = \frac{256}{15}a^3\,,$$

respectivamente.
Ayuda: utiliza el Teorema fundamental del cálculo.

39. **(I, IV)** Encontrar el volumen de un sólido cuya sección transversal por un plano perpendicular al eje de las abscisas tiene un área $A(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ para cada $x \in [0, h]$, donde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Si A_0, A_1 y A_2 corresponden a las áreas de las secciones transversales para $x = 0$, $x = h/2$ y $x = h$, respectivamente, escribe la fórmula del volumen del sólido en términos de estas áreas.
Ayuda: esta expresión se conoce como la fórmula del prismoide.
40. **(I, IV)** Determina la fórmula del volumen de un sólido que tiene una base circular de radio $r > 0$ y es tal que cada sección transversal perpendicular al diámetro de la base forma un triángulo equilátero.
41. **(I, IV)** Sean $r > 0$ y $a > 1$. Calcula el volumen de un sólido que se obtiene a partir de una esfera de radio ar y es agujerado a lo largo de cualquier diámetro por un cilindro cuya base circular es de radio r.
42. **(V)** Prueba que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + x^2 + \cdots + x^n\right) = \frac{1}{1-x}\,, \quad \text{si} \quad |x| < 1\,.$$

43. **(I, V)** Muestra que la función $f(x) = \arctan(x)$ tiene aproximación polinomial dada por

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2j+1}}{2j+1}\,.$$

Ayuda: considera el ejercicio anterior.
44. **(V)** Según la *Teoría de relatividad especial* de Einstein, la energía cinética relativista $T_{\mathrm{R}}(v)$ de una partícula de masa $m > 0$ que se mueve a una rapidez $v > 0$ está determinada por la fórmula

$$T_{\mathrm{R}}(v) = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right), \quad \text{donde} \quad c > 0 \quad \text{es la rapidez de la luz en el vacío.}$$

Encuentra la serie de potencias de $T_{\mathrm{R}}(v)$ y su radio de convergencia y verifica que para valores del cociente v/c cercanos a cero, se obtiene la energía cinética clásica $T_{\mathrm{C}}(v) = mv^2/2$.
Ayuda: toma en cuenta la serie del binomio.
45. **(V)** Sean la función $f(x) = x^p(1 - x^q)$, donde $p, q > 0$, y la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$a_n = \int_0^1 [f(x)]^n\,\mathrm{d}x\,.$$

Usando la **definición de convergencia**, prueba que $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.
Ayuda: encuentra una cota adecuada.
46. **(V)** Calcula el límite de $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

⋆47 **(V)** Considera la sucesión dada por $x_1 = 1$ y $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$ para $n \geq 2$. Muestra que la sucesión x_n converge y determina su límite.

48. **(V) Sin evaluar explícitamente** las siguientes integrales, muestra que

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 (\log x)^n \, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \int_2^3 (\log x)^n \, \mathrm{d}x = \infty\,.$$

Ayuda: considera el teorema del valor medio y la aditividad de la integral.

49. **(V)** Encuentra el valor de

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right) .$$

Ayuda: expresa cada término como una diferencia de fracciones.

50. **(V)** Demuestra que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n^\alpha + 1} - \sqrt{n^\alpha} \right)$$

es convergente, si $\alpha > 2$ y divergente de cualquier otra manera.
Ayuda: considera el ejercicio 46.

51. **(I, V)** Encuentra los primeros n términos de la serie de Taylor de

$$F(x) = \int_0^x e^{-u^2} \mathrm{d}u \quad \text{y} \quad G(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} \mathrm{d}u\,.$$

Ayuda: considera las series de Taylor de e^u y $\operatorname{sen}(u)$.

52. Sean $\alpha, \beta > 0$ y la función $f(u) = \alpha u^2/(2\beta)$. La longitud de curva de $f(u)$ está dada por la fórmula

$$L(x) = \int_0^x \sqrt{1 + [f'(u)]^2} \, \mathrm{d}u\,, \quad \text{donde} \quad 0 \le u \le x\,.$$

Muestra que

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/2\,(1/2-1)\cdots(1/2-n+1)}{n!(2n+1)} \frac{\alpha^{2n}}{\beta^{2n}} x^{2n+1}$$

y determina el **intervalo de convergencia**.
Ayuda: utiliza la serie del binomio.

$\star$53 Sea $w(x)$ una función positiva y dos veces diferenciable en todo $\mathbb{R}$ tal que
  (a) $\lim\limits_{|x|\to\infty} w(x) = 0$, $\lim\limits_{|x|\to\infty} w'(x) = 0$ y $w(0) = 3/2$;
  (b) la función $F(w)$ definida por

$$F(w) = \int_\alpha^w \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1 - 2u/3}}\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,,$$

  satisface la ecuación $F(w) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Prueba las siguientes afirmaciones:
  I. La función $w(x)$ satisface la ecuación $w'' - w + w^2 = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
  II. La función $w(x)$ está dada por $w(x) = \dfrac{3}{2}\operatorname{sech}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
  Ayuda: haz un cambio de variable hiperbólico.

III. La integral $\int_{-\infty}^{\infty} w(x)\mathrm{d}x$ es convergente y que su valor es 6.
Ayuda: usa la definición de la función $\cosh(\cdot)$.

IV. La identidad $\int_{-\infty}^{\infty} w(x)^2\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} w(x)\mathrm{d}x$ se satisface.

V. Las relaciones integrales I_1 y I_2, dadas por

$$I_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} w(x)^2\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{\infty} \left[w'(x)\right]^2 \mathrm{d}x} \quad \text{y} \quad I_2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} w(x)^3\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{\infty} \left[w'(x)\right]^2 \mathrm{d}x},$$

satisfacen el sistema lineal de ecuaciones $I_1 - \frac{2}{3}I_2 = 1$ y $-I_1 + I_2 = 1$.

VI. Encuentra los valores de $\int_{-\infty}^{\infty} \left[w'(x)\right]^2 \mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{\infty} w(x)^2\mathrm{d}x$ y $\int_{-\infty}^{\infty} w(x)^3\mathrm{d}x$.